

ROGERS ADEMIR DRUNN PEREIRA

MODELAGEM DO POTENCIAL PERTURBADOR COM BASE EM *WAVELETS*  
APLICADA À CONEXÃO DE REDES VERTICAIS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ciências Geodésicas.

Orientador: Prof.<sup>o</sup> Dr. Sílvio Rogério  
Correia de Freitas

CURITIBA

2013

---

P436m

Pereira, Rogers Ademir Drunn

Modelagem do potencial perturbador com base em *wavelets*  
aplicada à conexão de redes verticais / Rogers Ademir Drunn  
Pereira. – Curitiba, 2013.

175f. : il. [algumas color.], tab.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de  
Ciências da Terra, Programa de Pós-graduação em Ciências  
Geodésicas, 2013.

Orientador: Sílvia Rogério Correia de Freitas.

Bibliografia: p. 137-144.

1. Redes (Geodesia). 2. Gravidade (Física) – Medição.  
3. Wavelets. I. Freitas, Sílvia Rogério Correia de. II. Universidade  
Federal do Paraná. III. Título.

---

CDD: 526.7



Universidade Federal do Paraná  
Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas  
Caixa Postal 19001 - Fone: (41) 3361-3153  
CEP 81531-980 - Curitiba - PR - Brasil - e-mail: cpgcg@ufpr.br

Ata da sessão pública de defesa de Tese para obtenção do grau de Doutor em Ciências Geodésicas. Aos vinte e seis dias do mês de julho de dois mil e treze, na sala PI-13 do Centro Politécnico da Universidade Federal do Paraná, às 14:00 horas, reuniu-se em sessão pública a Banca Examinadora da prova de Defesa de Tese do candidato ao Título de Doutor em Ciências **ROGERS ADEMIR DRUNN PEREIRA**, composta pelo Prof. Dr. Sílvio Rogério Correia de Freitas como orientador e presidente (UFPR), e os Prof<sup>as</sup>. Dr<sup>a</sup>. Eniuce Menezes de Souza (UEM), Prof. Dr. Saulo Pomponet Oliveira (UFPR), Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Regiane Dalazoana (UFPR), Prof. Dr. Quintino Dalmolin (UFPR) e o Prof. Dr. Jorge Antonio Silva Centeno (UFPR) como membros. Após os esclarecimentos prestados pelo candidato às arguições feitas pelos membros da Banca, o Sr. Presidente suspendeu temporariamente a sessão a fim de que a Banca se reunisse em sessão secreta para deliberar sobre o resultado. Reaberta a sessão, o Sr. Presidente deu conhecimento ao candidato que de conformidade com o Art. 28º da Resolução 45/90 do CEP, a Tese foi **aprovada**, apenas condicionada à apresentação, no prazo de sessenta dias, da redação final com as alterações sugeridas.

Curitiba, 26 de julho de 2013.

Prof. Dr. Sílvio Rogério Correia de Freitas – Orientador e Presidente (UFPR)

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Eniuce Menezes de Souza – Membro (UEM)

Prof. Dr. Saulo Pomponet Oliveira - Membro (UFPR)

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Regiane Dalazoana (UFPR)

Prof. Dr. Quintino Dalmolin (UFPR)

Prof. Dr. Jorge Antonio Silva Centeno (UFPR)

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas (CPGCG) da Universidade Federal do Paraná (UFPR), pela oportunidade e espaço disponibilizado;

ao Laboratório de Referenciais Geodésicos e Altimetria por Satélites (LARAS), por também haver colaborado com a infraestrutura, além de recursos humanos e financeiros;

aos membros do CPGCG/UFPR: colegas, professores e secretaria. De algum modo, todos, em diferentes épocas e estágios, foram importantes para a realização deste trabalho;

aos Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), Instituto Geográfico Nacional da Argentina (IGN), Universidade Nacional de La Plata (UNLP) e Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA) que forneceram bases de dados e alimentaram discussões relevantes para os temas relacionados com esta pesquisa;

aos colegas do Setor de Geomática da Universidade Federal de Pelotas(UFPEL), cujo envolvimento foi decisivo para a finalização desta atividade;

ao CNPq, processos n.º 143345/2009-5 e n.º 141333/2011-1;

em especial, ao Professor Sílvio Rogério Correia de Freitas (que, distribui toda sua paciência, ânimo, boa vontade aos geodesófilos que o procuram) bem como à Ana Paula, aos Pais, aos Tio Nélon e Tia Marli, Dona Lindamir e família, aos muitos colegas que encontrei no CPGCG e, fundamentalmente,

não devem ser esquecidos aqueles que suportaram ou ajudaram a suportar as diferentes cargas envolvidas neste projeto.

Rogers: *Cara, o que diz a tua experiência sobre esse negócio?*

Mão Pelada: *Não vale a pena. Não mesmo.*

( Em 10/12/2007)

Grato, Mão Pelada.

## RESUMO

Modelagem do potencial perturbador com base em *wavelets* aplicada à conexão de redes verticais, pré-requisito à obtenção do grau de Doutor em Ciências Geodésicas, apresenta o problema da homogeneização de valores associados ao campo da gravidade visando-se à obtenção dos números geopotenciais e de outras funcionais associadas levando-se em conta anisotropias desconsideradas pelas técnicas de predição clássicas. *Wavelets* em termos de filtros são introduzidas como sendo uma possível alternativa para a solução do problema da heterogeneidade das informações gravimétricas no Brasil e da compatibilização dos diferentes referenciais envolvidos no cálculo de informações associadas. Para verificar esta potencialidade, um conjunto de informações gravimétricas disponibilizadas pelo banco de dados geodésicos do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, informações de campo levantadas por diversas instituições, modelos globais da gravidade e modelos digitais de altitude foram utilizados como fonte de dados. Com eles, foi possível então demonstrar que a análise multirresolução por *wavelets* é capaz de ligar as informações vinculadas aos curtos comprimentos de onda do geopotencial aos longos comprimentos de onda do geopotencial mantendo-se a referência dos últimos minimizando-se distorções. Tal efeito não foi observado para a solução do problema de valor de contorno da Geodésia livre e foi detectado na solução do problema de valor de contorno da Geodésia fixado. Documentaram-se no trabalho diversas atividades realizadas pelo Laboratório de Referenciais Geodésicos e Altimetria por Satélites da Universidade Federal do Paraná, bem como se disponibiliza uma série de códigos úteis ao cálculo de quantidades ligadas ao Geopotencial. Apresenta-se um número para a conversão de informações entre os data verticais de Imbituba e de La Plata.

Palavras-chave: Conexão de data verticais; modelagem; *wavelets*.

## ABSTRACT

Disturbing potential modeling with basis in *wavelets* applied to connection between vertical reference systems, requirement to get the Geodesy Degree Honor, shows the problem of regularization of gravity data in the sense to obtain geopotential numbers and another related information taking account anisotropies which are not considered by classical techniques. Wavelet filters are introduced as a possible alternative to solve the gravimetric heterogeneity of data in the Brazil as well as to minimize the problem related to the difference between the reference systems involved in the computation of geopotential quantities. In the sense to verify this potentiality, a set of informations provided by Brazillian Institute of Geography, surveying data from many institutions, global gravity models (GGMs) and digital elevation models are used as sourcedata. With this database, it was possible to evince that multirresolution wavelts can link the short wavelenght of geopotential to long wavelenght without loss of infortion and keeping reference system of GGMs. This effect was not observed in the solution for free boundary value problem and the same effect was detected in the solution for fixed boundary value problem of Geodesy. Besides, a lot of activities realized by Laboratório de Referencias Geodésicos e Altimetria por Satélites (LARAS) of Federal University of Parana and codes for solutioning the problems of geodesy was registered in the Thesis. Finally, a number to transform heights referred to Imbituba Vertical Datum and La Plata Vertical Datum was presented.

Keywords: Vertical reference systems connection; modeling; wavelets.

## RESUMEN

El modelamiento del potencial perturbador con base en wavelets aplicada a la conexión de redes verticales, requisito previo a la obtención del grado de Doctor en Ciencias Geodésicas, presenta el problema de la homogenización de valores asociados al campo de la gravedad con el objetivo de obtener los números geopotenciales y otras funcionales asociadas, tomando en cuenta anisotropías desconsideradas por las técnicas de predicción clásicas. Wavelets en términos de filtros son introducidas como una posible alternativa para la solución del problema de la heterogeneidad de las informaciones gravimétricas en Brasil y de la compatibilidad de los diferentes referenciales involucrados en el cálculo de informaciones asociadas. Para verificar esta potencialidad, fueron utilizados como fuente de datos, un conjunto de informaciones gravimétricas proporcionadas por el banco de datos geodésicos del Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE, a más de informaciones de campo levantadas por diversas instituciones, modelos globales de la gravedad y modelos digitales de altura. Con dichos datos, fue posible demostrar que el análisis multiresolución por wavelets es capaz de enlazar las informaciones de las longitudes de onda cortas del geopotencial a las longitudes de onda largas del geopotencial, manteniéndose la referencia de estas últimas, minimizando así distorsiones. Tal efecto no fue observado para la solución del problema de valor de contorno de la Geodesia libre y fue detectado en la solución fija del problema de valor de contorno de la Geodesia. Se documentaron en el trabajo diversas actividades realizadas por el Laboratorio de Referenciales Geodésicos y Altimetría por Satélites - LARAS de la Universidad Federal de Paraná, además se proporciona una serie de códigos útiles al cálculo de cantidades enlazadas al Geopotencial. Se presenta un afastamiento para la conversión de informaciones entre los data verticales de Imbituba en Brasil y de La Plata en Argentina.

Palabras-clave: Conexión de data verticales; modelado; wavelets.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>FIGURA 1</b> - Resolução, como empregado na Tese, versus tamanho do pixel.....	28
<b>FIGURA 2</b> - Representação digital dos dados. Na forma matricial original (a). Com a base cartográfica associada (b) .....	29
<b>Figura 3</b> – Superfícies de referência. ....	37
<b>Figura 4</b> - Representação dos coeficientes em um diagrama de filtros. ....	48
<b>Figura 5</b> - Diagrama de Filtros. Análise (esquerda) e Síntese (direita).....	50
<b>Figura 6</b> - Representação dos coeficientes em um diagrama de filtros. ....	51
<b>Figura 7</b> - Representação gráfica de filtros para <i>wavelets</i> de Haar .....	52
<b>Figura 8</b> - Esquema da decomposição <i>wavelet</i> de um sinal <i>S</i> . ....	53
<b>Figura 9</b> - Decomposição <i>wavelet bidimensional</i> em um (esquerda) e dois (direita) níveis. ....	56
<b>Figura 10</b> - Região de estudos A. ....	64
<b>Figura 11</b> - Regiões de Estudo B (Grifada com coloração diferente). ....	65
<b>Figura 12</b> - Esquema da Técnica <i>Remove-Restore</i> .....	72
<b>Figura 13</b> - Etapa <i>restore</i> representada num esquema de síntese por <i>wavelets</i> de Haar. ....	72
<b>Figura 14</b> - Esquema proposto para a validação dos coeficientes. ....	75
<b>Figura 15</b> - $N$ (esquerda) e $N - \zeta$ (direita). ....	77
<b>Figura 16</b> - Esquema de substituição das matrizes de <i>aproximação</i> . ....	82
<b>Figura 17</b> - Esquema da decomposição das matrizes originais. ....	82
<b>Figura 18</b> - Geodiversidade para o estado do Rio Grande do Sul. ....	86
<b>Figura 19</b> - Mapa Geológico para o estado do Rio Grande do Sul .....	87
<b>Figura 20</b> - Matriz de Densidades Sintética utilizada para simulação de alguns testes com variações laterais de densidade. Unidades em $\text{g/cm}^3$ .....	88
<b>Figura 21</b> – Anomalias de altitude para o EGM2008.....	90
<b>Figura 22</b> - Decomposição de anomalias de altitude referidas ao EGM2008 truncado no grau 360 utilizando <i>wavelets</i> de <i>Daubechies</i> . ....	91
<b>Figura 23</b> - Decomposição de anomalias de altitude referidas ao EGM2008 truncado no grau 360 utilizando <i>wavelets</i> de <i>Daubechies</i> . ....	91
<b>Figura 24</b> - Grade <i>EGM2008Recon</i> e resíduos da diferença relativamente à grade original. ....	92

<b>Figura 25-</b>	Reconstrução de anomalias de altitude utilizando <i>wavelets</i> da família <i>Symlets2</i> . ....	93
<b>Figura 26</b>	Reconstrução de anomalias de altitude utilizando <i>wavelets</i> da Família <i>Coiflets2</i> . ....	93
<b>Figura 27 -</b>	Reconstrução de anomalias de altitude utilizando <i>wavelets</i> da Família <i>Biortogonais2.4</i> . ....	94
<b>Figura 28 -</b>	DEM ETOPO1.....	95
<b>Figura 29-</b>	Decomposição do DEM ETOPO1 em <i>wavelets</i> de Daubechies. Aprox. e detalhes.....	96
<b>Figura 30 -</b>	Decomposição do DEM ETOPO1 a partir das <i>wavelets</i> de Daubechies. Detalhes. ....	96
<b>Figura 31 -</b>	Reconstrução do DEM ETOPO1 a partir das <i>wavelets</i> de Daubechies. ... ..	97
<b>Figura 32-</b>	TC para o ETOPO1 e resíduos da sua reconstrução a partir das <i>wavelets</i> de <i>Daubechies</i> . ....	97
<b>Figura 33 -</b>	Efeito RTM para raios de integração de 10 (à esquerda) e 20 km (à direita). 99	
<b>Figura 34 -</b>	Resíduos da reconstrução do RTM a partir de <i>wavelets</i> de <i>Daubechies</i> . ....	99
<b>Figura 35-</b>	Caracterização dos elementos da Carta "Geodiversidade" disponibilizada pela CPRM. ....	100
<b>Figura 36 -</b>	Modelo ETOPO1 expandido até o grau 2250, à esquerda, e até o grau 720, à direita. Unidades em metros.....	101
<b>Figura 37-</b>	Diferenças entre um mesmo MDA segundo diferentes expansões....	102
<b>Figura 38-</b>	Correções do Terreno. ....	102
<b>Figura 39-</b>	$TC_{\rho \text{ variável}} - TC_{\rho \text{ constante}}$ . ....	103
<b>Figura 40 -</b>	Diferenças de altitude sobre RNs: AAGP -AA2011. Unidades em m. ....	104
<b>Figura 41-</b>	Estações gravimétricas disponíveis para o estado do Rio Grande do Sul no Banco de Dados Geodésicos do IBGE segundo as suas fontes. . ....	105
<b>Figura 42-</b>	Estações Gravimétricas fornecidas pelo IGN (Argentina) e Novas Estações Gravimétricas materializadas pelo IBGE-UFPR. ....	106
<b>Figura 43 -</b>	Conexão São Borja/Santo Tomé. Situação de 2010.....	107

<b>Figura 44</b> - Conexão Itaqui/Gal. Alvear. Situação de 2010.....	109
<b>Figura 45</b> – Anomalias Bouguer segundo a teoria clássica.....	112
<b>Figura 46</b> - Anomalias <i>Free-Air</i> segundo a T. clássica obtidas do EGM2008 truncado no grau 360. ....	112
<b>Figura 47</b> - Anomalias da Gravidade <i>Free-Air</i> obtidas da manipulação das Anomalias da Gravidade Bouguer e o ETOPO1. ....	113
<b>Figura 48</b> - Anomalias da Gravidade <i>Free-Air</i> residuais.....	113
<b>Figura 49</b> - Alturas geoidais residuais. Unidades em metros. ....	114
<b>Figura 50</b> - Cogeóide (Esquerda) e Geoide -EGM2008 <sub>GrauMáx.</sub> (Direita) para o estado do Rio Grande do Sul. ....	115
<b>Figura 51</b> - EGM2008 desenvolvido até o grau máximo menos cogeóide calculado. ....	115
<b>Figura 52</b> - Covariância empírica (Covariância) e ajustes aplicados. ....	119
<b>Figura 53</b> - Representação da arquitetura de RNA utilizada na Tese. ....	121
<b>Figura 54</b> - Pontos de teste e validação utilizados no treinamento da RNA. ....	122
<b>Figura 55</b> - Estação duvidosa de 2009. ....	123
<b>Figura 56</b> - Grade do EGM2008 menos a do cogeóide determinado via metodologia clássica. Panorama geral (Esquerda) e em detalhes (direita). 125	
<b>Figura 57</b> – Grade do EGM2008 (360) menos a da solução do geoide por <i>wavelets</i> . ....	126
<b>Figura 58</b> – Grade do cogeóide menos a da solução do geoide por <i>wavelets</i> . Unidades em metros.. ....	126
<b>Figura 59</b> – Grade do cogeóide menos a da solução do geoide por <i>wavelets</i> . Região discretizada.....	127
<b>Figura 60</b> - Anomalias da Gravidade.....	128
<b>Figura 61</b> - Anomalias da Gravidade.....	128
<b>Figura 62</b> - Diferença entre grades de anomalias da gravidade. ....	129
<b>Figura 63</b> - Pontos GNSS associados com gravimetria.....	130
<b>Figura 64</b> - $\zeta$ residuais (à direita) e efeito RTM em termos de $T$ (à esquerda). ....	130
<b>Figura 65</b> - Solução do PVCG Fixado .....	131
<b>Figura 66</b> - Solução geoidal por wavelets menos solução pelo PVCG Fixado .....	131

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1</b> - Elementos dispostos na Figura 3. ....	38
<b>Quadro 2</b> - Caracterização das possibilidades para fusão de dados com base em <i>wavelets</i> . ....	84
<b>Quadro 3</b> - Elementos utilizados para a geração da matriz de densidades sintética. ....	88
<b>Quadro 4</b> - Diferenças nas conexões realizadas em função dos Ajustamentos de 2011 e AAGP.. ....	110
<b>Quadro 5</b> - Descrição dos resultados da reconstrução do sinal Geopotencial por <i>wavelets</i> . ....	116
<b>Quadro 6</b> - Resultados para a recomposição do sinal geopotencial por <i>wavelets</i> . ....	117
<b>Quadro 7</b> - Polinômio de 6. <sup>a</sup> ordem ajustado.....	119
<b>Quadro 8</b> - Função de Fourier. ....	119
<b>Quadro 9</b> - Estratégia aplicada para o treinamento da RNA. ....	121

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AA2011	Ajustamento Altimétrico da RAFB realizado em 2011
AAGP	Ajustamento Altimétrico Global Preliminar (da RAFB)
ARTC	Programa para treinamento de RNAs desenv. por A.R. Tierra Criollo
CHAMP	<i>Challenging Minisatellite Payload</i>
CMQ	Colocação por Mínimos Quadrados
CPRM	Serviço Geológico do Brasil
CQF	<i>Conjugate Quadrature Filters</i>
DFT	<i>Discrete Fourier Transform</i> (Transformada de Fourier Discreta)
EGM2008	<i>Earth Gravitational Model 2008</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i> (Transformada Rápida de Fourier)
GNSS	<i>Global Navigation Sattelite System</i> (Sist. de Posicionam. Global)
GOCE	<i>Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer</i>
GPS	<i>Global Positioning System</i>
GRACE	<i>Gravity Recovery and Climate Experiment</i>
HPF	<i>High Pass Filter</i>
IAG	<i>International Association of Geodesy</i>
IBGE	Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
ICGEM	<i>International Centre for Global Earth Models</i>
IDFT	<i>Inverse Discrete Fourier Transform</i> (Transf.de Fourier Discreta Inversa)
IFFT	<i>Inverse Fast Fourier Transform</i> (Transf. Rápida de Fourier Inversa)
IGeS	<i>International Geoid Service</i>
IHPF	<i>Inverse High Pass Filter</i>
ILPF	<i>Inverse Low Pass Filter</i>
IntPS	Integral de Pizetti-Stokes
LARAS	Laboratório de Referenciais Geodésicos e Altimetria por Satélites
LPF	<i>Low Pass Filter</i>
MDA	Modelo Digital de Altitude
MGGs	Modelos Globais do Geopotencial
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
MRA	<i>Multiresolution Analysis</i>
NGA	<i>National Geospatial Agency</i>
ON	Observatório Nacional
PSD	<i>Power Spectral Density</i>
PVCG	Problema de Valor de Contorno da Geodésia
QMF	<i>Quadrature Mirror Filters</i>
RAFA	Rede Altimétrica Fundamental Argentina
RAFB	Rede Altimétrica Fundamental Brasileira
RBMC	Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo
RNAs	Redes Neurais Artificiais
RR	<i>Remove-Restore</i>
RTM	Residual Terrain Model
SFT	Superfície Física da Terra
SGA	Sistema Global de Altitudes
SGB	Sistema Geodésico Brasileiro
SGR	Sistema Geodésico de Referência
TNMM	Topografia do Nível Médio dos Mares
UFPR	Universidade Federal do Paraná

UNIPAMPA	Universidade Federal do Pampa
UNLP	Universidad Nacional de La Plata
WFT	Windowed Fourier Transform

## LISTA DE SÍMBOLOS

$R$	Raio de uma Terra esférica de volume igual ao do elip. de referência
$R_1$	Raio de um círculo cuja área é igual à de uma quadrícula discreta
$\gamma$	Gravidade normal
$\Delta g$	Anomalia da Gravidade
$S(\psi)$	Função de Stokes
$d\sigma$	Elemento diferencial de área
$N$	Altura Geoidal
$\sigma$	Área da Superfície Física, ou da Terra ou do Geoide
$\varphi, \lambda$	Latitude Geodésica, Longitude Geodésica
$q$	Elemento de área em rad <sup>2</sup>
$\Delta\sigma$	Elemento finito de área
$\Delta g_{residuais}$	Anomalia da gravidade residual
$\Delta g_{observada}$	Anomalia da gravidade proveniente da gravidade observada
$\Delta g_{Bouguer}$	Anomalia da gravidade do tipo <i>Bouguer</i>
$\Delta g_{free-air}$	Anomalia da gravidade do tipo <i>free-air</i>
$\Delta g_{MGG}$	Anomalia da gravidade obtida dos coeficientes de um MGG
$\Delta g_{RTM}$	Anomalia da gravidade proveniente do efeito RTM
$\Delta g_M$	Anomalia da Gravidade no Sentido da Teoria de Molodenskii
$H$	Altitude ortométrica do ponto
$TC$	<i>Terrain Correction</i> - Correção do Terreno
$N_p$	Altura geoidal de um ponto; tamanho de um vetor
$N_{residual}$	Altura geoidal proveniente da int.de Stokes sobre anomalias residuais
$N_{MGG}$	Altura geoidal gerada a partir de um MGG
$EI$	Efeito Indireto
$\psi$	Distância angular esférica
$\zeta, \zeta_P$	Anomalia de Altitude
$\zeta_{residual}$	Anomalia de altitude calculada a partir dos efeitos residuais
$\zeta_{MGG}$	Anomalia de altitude obtida a partir dos coeficientes de um MGG
$\zeta_{RTM}$	Anomalia de altitude calculada a partir do efeito RTM
$G_0, G_1, \dots, G_n$	Termos da Série de Molodenskii
$g_P$	Gravidade observada na SFT
$\gamma_Q$	Gravidade normal calculada no teluroide
$U$	Esferopotencial
$W$	Geopotencial
$x(n)$	Vetor amostral de informações
$n$	Posição do elemento num vetor, grau de desenvolvimento
$\omega$	Frequência de Amostragem
$j$	Var. complexa; menor absoluto inteiro de uma potência cuja base é 2
$X, Y$	Vars. que contém coeficientes da Transf. de Fourier de variáveis $x, y$ .
$x, y$	Vetores amostrais; par de coordenadas plano-retangulares
$f(x)$	Função de $x$

$S$	Função densidade de potência espectral
$T$	Período
$A$	<i>Aproximação</i>
$D$	<i>Detalhe</i>
$y[n], w[n]$	Sistema de filtros usados na decomposição por <i>wavelets</i>
$\downarrow 2$	<i>Downsampling</i>
$\uparrow 2$	<i>Upsampling</i>
$\oplus$	Adição vetorial termo à termo
$\otimes$	Multiplicação vetorial termo à termo
$D$	<i>Delay</i> (Atraso na posição)
$\psi_{jk}(x)$	Função mãe ou Família <i>wavelet</i>
$W_f$	Transformada <i>wavelet</i> de $f(t)$
$a$	Coeficiente <i>wavelet</i> de escala
$b$	Coeficiente <i>wavelet</i> de translação
$\mathbf{x}$	Vetor das Observações
$\mathbf{AX}$	Matriz da parte sistemática
$\mathbf{s}$	Sinal
$\mathbf{n}$	Ruído
$\mathbf{C}_{SX}$	MVC obtida das observações conhecidas e dos elementos a prever
$\mathbf{C}^{-1}$	Matriz covariância obtida das observações conhecidas
$h$	Altitude geodésica
$\rho$	Densidade de massa
$x, y, z$	Tríade de coordenadas cartesianas
$G$	Constante da Gravitação Universal
$V_{RTM}$	Potencial de atração devido ao efeito RTM
$l_0$	Distância entre os pontos $H_P$ e $H_{P'}$
$H_P$	Ponto de cálculo
$H_{P'}$	Ponto de avaliação
$b$	<i>Bias</i>
$W$	Peso ( <i>Weight</i> )



## SUMÁRIO

<b>AGRADECIMENTOS</b> .....	<b>4</b>
<b>RESUMO</b> .....	<b>VI</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>VII</b>
<b>RESUMEN</b> .....	<b>VIII</b>
<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES</b> .....	<b>IX</b>
<b>LISTA DE QUADROS</b> .....	<b>XII</b>
<b>LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS</b> .....	<b>XIII</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	<b>XV</b>
<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	<b>20</b>
1.1. OBJETIVO GERAL.....	23
1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	23
1.3. JUSTIFICATIVA.....	24
<b>2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	<b>26</b>
2.1. RESOLUÇÃO, ESCALA E CÉLULA NAS CIÊNCIAS GEODÉSICAS .....	27
2.2. METODOLOGIAS PARA A AVALIAÇÃO DE ALGUNS MODELOS INTEGRAIS APLICADOS EM GEODÉSIA.....	29
2.2.1. O processo de integração numérica e a metodologia <i>remove-restore</i> (RR) segundo a visão clássica .....	31
2.2.2. A integração numérica e a técnica RR segundo a visão moderna .....	36
2.2.3. As Integrações Geodésicas a partir de transformadas de Fourier e do teorema da convolução.....	41
2.3. ABORDAGEM GERAL DE ANÁLISE E SÍNTESE E PROCESSAMENTO DE SINAIS DIGITAIS NAS CIÊNCIAS GEODÉSICAS .....	44
2.3.1. <i>Wavelets</i> .....	46
2.3.2. <i>Wavelets</i> em duas dimensões .....	55
2.3.3. Colocação por mínimos quadrados - CMQ.....	57
2.3.4. Redes neurais artificiais.....	59
2.3.5. Validação de dados <i>Cross-Validation</i> .....	61
2.3.6. Automação do processamento de dados geodésicos nesta pesquisa .....	61
<b>3. REGIÕES DE ESTUDO E FONTES DE DADOS DISPONÍVEIS</b> .....	<b>63</b>
3.1. REGIÃO DE ESTUDOS A .....	63
3.2. REGIÃO DE ESTUDOS B .....	65

3.3.	MISSÃO GRACE, MISSÃO GOCE E MODELOS GRAVIMÉTRICOS ASSOCIADOS .....	66
3.4.	O MGG EARTH GRAVITATIONAL MODEL 2008 (EGM2008).....	67
3.5.	MODELOS DIGITAIS DE ALTITUDES .....	68
<b>4.</b>	<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>71</b>
4.1.	VALIDAÇÃO DA ESCOLHA DOS COEFICIENTES DO CONJUNTO DE <i>WAVELETS</i> ADOTADA .....	74
4.2.	FUSÃO DOS LONGOS, MÉDIOS E CURTOS COMPRIMENTOS DE ONDA COM BASE EM <i>WAVELETS</i> .....	80
4.3.	CARACTERIZAÇÃO DOS FUNCIONAIS UTILIZADOS NA FUSÃO DOS DADOS .....	83
4.4.	INTRODUÇÃO DA DENSIDADE DA CROSTA COMO FORMA DE MELHORAR A INFORMAÇÃO PRESENTE NOS <i>DETALHES</i> .....	84
<b>5.</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>	<b>89</b>
5.1.	VALIDAÇÃO DA FAMÍLIA DE <i>WAVELETS</i> UTILIZADA PARA LONGOS E CURTOS COMPRIMENTOS DE ONDA DO GEOPOTENCIAL .....	89
5.1.1.	Validação de Dados associados aos longos comprimentos de onda do geopotencial- .....	89
5.1.2.	Validação de Dados associados aos curtos comprimentos de onda do Geopotencial.....	94
5.2.	ASSOCIAÇÃO DE ELEMENTOS DE ALTITUDE COM VALORES DE DENSIDADE DA CROSTA COM OS CURTOS COMPRIMENTOS DE ONDA DO GEOPOTENCIAL .....	100
5.3.	COMPATIBILIZAÇÃO DO POTENCIAL PERTURBADOR SEGUNDO UM MESMO REFERENCIAL VISANDO À CONEXÃO DAS REDES ALTIMÉTRICAS FUNDAMENTAIS DO BRASIL E DA ARGENTINA .....	103
5.4.	ANÁLISE DO POTENCIAL PERTURBADOR SEGUNDO UM MESMO REFERENCIAL VISANDO-SE À RECONSTRUÇÃO DO SINAL GEOPOTENCIAL A PARTIR DE <i>WAVELETS</i> .....	111
5.5.	RECONSTRUÇÃO DO SINAL GEOPOTENCIAL COMPLETO POR <i>WAVELETS</i> .....	114
5.6.	OBTENÇÃO DE UMA FUNÇÃO COVARIÂNCIA MODELADORA DAS ANOMALIAS DA GRAVIDADE PARA AS REGIÕES A E B .....	118

5.7.	TREINAMENTO DE UMA RNA PARA OBTENÇÃO DE ANOMALIAS DA GRAVIDADE NAS REGIÕES A E B.....	120
5.8.	VERIFICAÇÃO DA ESTABILIDADE DAS CONEXÕES GERADAS.....	122
5.9.	AUTOCONSISTÊNCIA DAS SOLUÇÕES GERADAS .....	124
5.9.1.	Cogeoide Regional versus EGM2008.....	124
5.9.2.	Cogeoide (Teoria Clássica) versus modelagem do geoide por <i>wavelets</i> .....	125
5.9.3.	$\Delta g_{CMQ}$ versus $\Delta g_{RNA}$ versus $\Delta g_{wavelets}$ versus $\Delta g_{cogeoide}$ .....	127
5.9.4.	Uma solução em termos de distúrbios da gravidade .....	129
6.	<b>CONTRIBUIÇÕES DESTA PESQUISA PARA AS CIÊNCIAS GEODÉSICAS NO BRASIL .....</b>	<b>132</b>
7.	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....</b>	<b>134</b>
8.	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>137</b>
9.	<b>DOCUMENTOS CONSULTADOS .....</b>	<b>143</b>
10.	<b>APÊNDICE A.....</b>	<b>145</b>
11.	<b>APÊNDICE B.....</b>	<b>150</b>
12.	<b>APÊNDICE C.....</b>	<b>151</b>
13.	<b>APÊNDICE D.....</b>	<b>154</b>
14.	<b>APÊNDICE E.....</b>	<b>158</b>
15.	<b>APÊNDICE F .....</b>	<b>160</b>
16.	<b>APÊNDICE G .....</b>	<b>164</b>
17.	<b>APÊNDICE H.....</b>	<b>166</b>
18.	<b>APÊNDICE I .....</b>	<b>167</b>
19.	<b>APÊNDICE J .....</b>	<b>168</b>
20.	<b>APÊNDICE K.....</b>	<b>171</b>
21.	<b>APÊNDICE L .....</b>	<b>173</b>
22.	<b>APÊNDICE M .....</b>	<b>174</b>
23.	<b>APÊNDICE N.....</b>	<b>175</b>

## 1. INTRODUÇÃO

“Existe um grande arsenal de ferramentas para a análise de sinais”. Esta é uma frase encontrada tradicionalmente em bibliografias que tratam do processamento de sinais no domínio do espaço ou do tempo, ou em outras palavras, de séries de amostras espaciais ou temporais de grandezas físicas. De todas as ferramentas disponíveis para a denominada análise de sinais, provavelmente a mais empregada é a análise de Fourier, que preconiza a possibilidade de representação de qualquer função matemática definida dentro de uma janela finita com base na soma de termos de uma série de funções periódicas. A análise no domínio do tempo (para séries temporais) ou do espaço (para distribuições espaciais) é efetivada via correlações com modelos físico-matemáticos, autocorrelações, correlações cruzadas ou análise de covariâncias entre diferentes bases amostrais. Por outro lado, com base na denominada transformada de Fourier de séries temporais ou espaciais para o domínio das frequências, é possível analisar a existência de sinais periódicos em uma sequência finita de observações, por exemplo, com base na função denominada densidade de potência espectral, a qual possibilita identificar o conteúdo espectral do sinal e a amplitude em cada frequência identificada. Nas Ciências Geodésicas, similarmente, tanto a expansão em série de funções ortogonais como a transformada de Fourier são encontradas no desenvolvimento de Modelos Globais do Geopotencial (MGGs), nos problemas de otimização (cálculo do geoide, correções do terreno, efeito indireto), como também na análise de séries temporais, tais como variações de coordenadas obtidas com GNSS ou de valores gravimétricos, dentre outros. Os MGGs são usualmente apresentados na forma de desenvolvimentos harmônicos, sendo especialmente importantes porque possuem componentes ortogonais entre si e assim são úteis para expressar a magnitude de um sinal e/ou quantidade associada a um determinado ponto, separando diferentes resoluções associadas às componentes espectrais.

Daqui em diante cabe lembrar que a análise de Fourier fornece apenas um espectro estacionário ou uma resposta média para todo o intervalo ou espaço de análise para cada frequência resolvida (EL-HABIBY & SIDERIS, 2006a). Portanto, a maior limitação da análise de Fourier refere-se às dificuldades de modelagens anisotrópicas de variações temporais ou espaciais no espectro. Esta limitação

apesar de ser naturalmente perceptível na análise de sinais, também ocorre em todos os demais produtos que estão vinculados às tradicionais transformadas de Fourier, tais como os modelos em constante desenvolvimento a cada estágio evolutivo das tecnologias empregadas no domínio das Ciências Geodésicas. De forma mais específica, são os casos dos MGGs e Modelos Digitais de Altitudes (MDAs) que têm sofrido modificações significativas com aumento da acurácia e resolução espacial principalmente em função das novas plataformas orbitais.

Com base nestes fatos, muitos usuários do processamento de sinais vêm propondo nos últimos anos a utilização de uma ferramenta relativamente nova: as denominadas *wavelets*, frequentemente denominadas de ondaletas, em Português (ANTAS, 20??). É importante ressaltar que as *wavelets* são promissoras para constituir ferramentas adequadas ao processamento de sinais não estacionários ou com variabilidade anisotrópica. A principal vantagem das *wavelets* sobre as demais ferramentas é a capacidade de distinguir mudanças da composição espectral ao longo do tempo ou na distribuição espacial (KLEES & HAAGMANS, 2000, KELLER 2004). Este fato pode ser especialmente interessante se considerado que a maioria dos eventos associados à dinâmica planetária é decorrente da superposição de efeitos de duas ou (em geral) mais funcionais associadas, de natureza periódica ou não (TURCOTTE & SCHUBERT, 1982). Assim, existem funcionais no espaço sob análise que, em decorrência do conhecimento da maior parte da causa do fenômeno, podem ser consideradas como de composição espectral periódica (e.g.: deformações oriundas da atração luni-solar; tectônica global e regional associada ao sinal topográfico) e outras de natureza anômala (e.g. eustasia; heterogeneidades laterais da crosta terrestre produzidas por eventos locais). Separar as componentes espectrais periódicas dos fenômenos não desenvolvíveis em termos de sinais periódicos é uma meta implícita no escopo das Ciências Geodésicas. Isto decorre do fato de que a Terra não é nem corpo rígido, nem homogêneo, nem estático, e é sujeita a fenômenos periódicos e não periódicos que produzem em última análise variações na distribuição de massas com implicações diretas no campo da gravidade (PLAG & PEARLMAN, 2009).

Dentro de uma perspectiva mais específica neste trabalho, busca-se principalmente a) a modelagem do potencial perturbador e de suas variações laterais, associadas a aspectos periódicos ou não, em vista de necessidades específicas de predição de valores de funcionais associadas ao espaço do

geopotencial em pontos de interesse; e b) modificações nas técnicas usuais de resolução do Problema do Valor de Contorno da Geodésia (PVCG) atendendo às características preconizadas das anisotropias usualmente não consideradas nas soluções clássicas. Estes objetivos últimos estão intimamente relacionados com procedimentos baseados em análise e síntese por *wave/ets*. Entende-se que estes são problemas atuais da Geodésia global e regional, e estão relacionados com a necessária associação da gravidade às operações de nivelamento, tal como as preconizadas na formação de um Sistema Global de Altitudes (IHDE et al., 2010), bem como à obtenção de modelos geoidais e/ou quasegeoidais locais, por exemplo. Neste contexto, é fundamental a obtenção de números geopotenciais para formação de sistema físico de altitudes associado de forma unívoca ao geopotencial. Estes dependem do conhecimento da gravidade nas estações de nivelamento e, deve ser lembrado que, em qualquer ponto da superfície física da Terra, o sinal gravimétrico tem, em uma divisão arbitrariamente simplista, componentes espectrais globais, regionais e locais. Em consequência, a correta interpolação de valores da gravidade em um ponto dependerá também do modo como se considera estas componentes espectrais.

Tradicionalmente, a ferramenta utilizada na Geodésia para a abordagem da predição gravimétrica é a da Colocação por Mínimos Quadrados (CMQ). Esta técnica depende essencialmente do estabelecimento de uma função de covariância dos dados amostrados e da natureza de distribuição espacial, cuja solução exige um elevado grau de redundância espacial das informações (MORITZ, 1980). Existem dificuldades associadas ao estabelecimento da função covariância para a CMQ e para a obtenção da adequada redundância espacial referida. Limitações equivalentes existem também para outras técnicas tradicionais associadas a procedimentos determinísticos tal como a interpolação polinomial, ou modelagens estatísticas, tal como a *krigagem* (LANG, 2011). Todas estas técnicas são de forma geral isotrópicas tais que afetam a composição espectral do sinal gravimétrico, principalmente porque consideram somente variações que são função da distância até o ponto de cálculo. Em épocas mais recentes buscaram-se algumas técnicas não determinísticas para fazer-se face a este problema de anisotropia, como técnicas de predição com base em Redes Neurais Artificiais (RNAs, como por exemplo, em TIERRA CRIOLLO e DE FREITAS, 2005), porém usualmente desvinculadas da necessária discriminação de conteúdos espectrais e com alta

dependência de redundâncias espaciais. Então, as *wavelets*, que possuem baixa dependência de redundância espacial de dados (KARKANIS et al., 1998) e permitem análises da magnitude e conteúdo espectral em função da variação lateral, configuram-se como uma ferramenta promissora para otimizar o problema da predição/obtenção de valores da gravidade. Esta é a hipótese central investigada neste trabalho. Busca-se, portanto, de forma original, a modelagem da variabilidade da composição espectral do sinal gravimétrico e, em vista da modelagem, realizar-se a predição da gravidade em pontos de interesse, associados a linhas de nivelamento, objetivando-se a obtenção dos números geopotenciais com qualidade suficiente para ligação de redes de nivelamento a um Sistema Global de Altitudes - SGA. Com as áreas de teste, pretende-se demonstrar a possibilidade da análise *wavelet* das grandezas associadas à conexão das redes de nivelamento do Brasil e da Argentina e suas conexões com um SGA, além de apresentar a hipótese de reconstrução das quantidades vinculadas ao geopotencial. Dadas estas metas, apresenta-se sucintamente também os problemas inerentes ao tratamento de dados em vista de suas representações discretas e contínuas, os problemas operacionais encontrados e outras dificuldades afetas à modelagem de heterogeneidades, consequências das distribuições topográfica e de densidades, e predição em pontos de interesse considerando as anisotropias.

### **1.1. Objetivo Geral**

Modelar a variabilidade lateral do conteúdo espectral do sinal gravimétrico com base na análise do potencial anômalo gerado por anisotropias na distribuição de massas topográficas e de densidades.

### **1.2. Objetivos Específicos**

- a) Efetivar a constituição de base geodésica, com ênfase à modelagem do sinal gravimétrico, via compilação eventual de dados existentes e complementação com novas observações, para o estabelecimento de condições suficientes à conexão das redes verticais fundamentais do Brasil e da Argentina em área de teste;

- b) Realizar a predição do sinal gravimétrico em área teste com base em CMQ, *krigagem* e RNA;
- c) Desenvolver ferramentas de interpolação associando a modelagem de variabilidade lateral do conteúdo espectral com base em funções tipo *wavelets* comparando seu desempenho com as técnicas CMQ, *krigagem* e RNA;
- d) Efetivar a análise de solução de conexão de redes com base nas diferentes ferramentas desenvolvidas.

### 1.3. Justificativa

Na atualidade o MGG EGM2008 (*Earth Gravitational Model 2008*, NGA, 2011) é tido como uma das melhores modelagens do campo da gravidade da Terra em vista de sua resolução espacial e consistência global. No entanto, este modelo, desenvolvido em série de harmônicos esféricos, tem sua melhor resolução espectral associada ao grau 2190 e ordem 2159, que implicam em resolução espacial na ordem de 9 km em regiões com alta densidade de informações gravimétricas, o que não acontece de forma geral na América do Sul. Considere-se ainda que esta melhor resolução é ainda insuficiente para algumas aplicações, tal como a predição gravimétrica necessária à determinação de números geopotenciais em estações de nivelamento, essenciais à formação de sistemas de altitudes com significado físico. A evolução dos MGGs implica também no aumento da capacidade de processamento de mega-arquivos e com modelagem computacional extremamente complexa, principalmente, na atualidade, com a incorporação de novos coeficientes que transformam os coeficientes harmônicos esféricos em elipsoidais. Estes MGGs constituem apenas parte do arcabouço da base geodésica utilizada em bases de dados nacionais, uma vez que apresentam resolução espacial limitada, conforme manifestado, e principalmente não resolvem os curtos comprimentos de onda. Desta forma, outras informações devem ser incorporadas, tais como as locais advindas de MDAs, coordenadas horizontais e verticais, gravimetria regional e modelagem adequada da estrutura da crosta. A transformada *wavelet*, além de ser uma ferramenta apta à modelagem de variações espectrais anisotrópicas, é também a ferramenta atual mais indicada na geração de informações com significativos níveis



de economia de memória sem perda de acurácia (EL-HABIBY & SIDERIS, 2006a). Tal economia está principalmente vinculada à análise multirresolução que permite o trabalho com matrizes esparsas, que geram um volume muito menor de dados.

Todas estas características são observadas durante a análise e síntese por *wavelets* quando se obtém as matrizes de *aproximação* e de *detalhe* derivadas, principalmente se comparadas à FFT (do inglês *Fast Fourier Transform*) e a CMQ, que apresentam arquivos provenientes da transformada com o mesmo tamanho do arquivo a ser analisado ou deficiências na modelagem da variabilidade lateral do sinal gravimétrico, respectivamente. Para as *wavelets*, em geral, as análises (resultados das transformadas diretas) têm a metade do tamanho das matrizes originais, o que gera arquivos com a metade do tamanho dos arquivos gerados pela FFT, por exemplo.

O problema da predição gravimétrica merece atenção especial na América do Sul. Em particular, considerando-se os problemas associados a esta pesquisa: a) o da conexão das redes verticais nacionais do Brasil e da Argentina; b) bases gravimétricas heterogêneas, c) discrepâncias entre os *data* verticais, d) levantamentos com metodologias diferenciadas, e) deformações próprias das redes em vista das heterogeneidades nas estratégias de ajustamento de cada rede, e f) aplicação somente de correções teóricas da gravidade baseadas em diferentes modelos do campo da gravidade normal. Estimativas apontam para diferenças gravimétricas da ordem de até 0,5 mGal na região fronteira do Brasil com a Argentina, sobre os mesmos pontos, porém com mensurações vinculadas às diferentes estruturas geodésicas fundamentais de cada país. Este aspecto reflete-se principalmente nas anomalias da gravidade vinculadas a cada uma das redes verticais. Tal problema estará obviamente presente em qualquer conexão de rede vertical no continente se pretendido que estas se refiram a um único referencial global. Este cenário aponta as *wavelets* de forma bastante promissora como solução possível para detecção de fenômenos cuja explicação não pode ser alcançada pelas teorias clássicas (e.g vazios geopotenciais em regiões de fronteira) em vista da suas propriedades de localização espacial e levando-se em conta os diferentes referenciais envolvidos.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Em Geodésia as informações associadas à modelagem da forma, dimensões, campo da gravidade externo bem como suas variações temporais podem ser expressas tanto de maneira discreta quanto contínua. Assim, a abordagem empregada na solução de problemas correlatos à modelagem de dados deve propiciar que cada uma das bases correspondentes possa sempre ser transformada da forma discreta para a contínua e vice-versa sem perda significativa da informação contida (SANSÓ, 2008). Este fato é fundamental, pois sendo válida ainda a definição da Geodésia como a ciência da mensuração e representação da Terra (HELMERT, 1880, apud TORGE, 2002), é evidente o trânsito entre bases de dados discretas e modelos contínuos, sempre em vista da amostragem real. Assim, a predição de valores associados ao campo da gravidade é tema essencial para a Geodésia e neste particular muito esforço tem sido realizado no sentido de sua melhor realização. Considerando-se o problema de interpolação de valores da gravidade em uma geometria particular como ao longo das linhas de nivelamento geodésico, muitos aspectos devem ser discutidos, em vista das funcionais e referenciais envolvidos. Então, além das formas de transição entre o discreto e o contínuo (com base usual na avaliação de integrais de linha, superfície e volumétricas em pontos de interesse) os aspectos relativos à amostragem ou ao controle da discretização de modelos contínuos são necessários para absorção de novas informações e predição de valores. No entanto, nas abordagens convencionais não são, em geral, considerados os conteúdos espectrais das grandezas tratadas bem como suas possíveis propriedades anisotrópicas. Assim, a consideração destes aspectos são elementos centrais abordados neste estudo que buscou tirar proveito de base de dados envolvendo parte da Rede Altimétrica Fundamental do Brasil (RAFB) e da Rede Altimétrica Fundamental da Argentina (RAFA). Com isto, destaca-se aqui que as técnicas de predição/discretização apresentam-se como elementos fundamentais para os estudos realizados em área envolvendo conexão parcial das RAFB e RAFA.

## 2.1. Resolução, Escala e célula nas Ciências Geodésicas

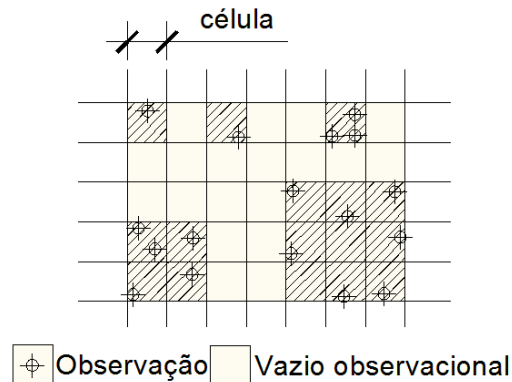
Uma preocupação inerente aos produtos cartográficos até o início da era digital era estabelecer o espaçamento mínimo entre observações para que uma determinada escala fosse atendida, sem, no entanto, prejudicar a qualidade do produto final - a carta. Atualmente, a representação digital na forma matricial permite que produtos possam ser expressos como arranjos de matrizes em que cada elemento desta matriz represente, por exemplo, uma cor numa escala de nuance de cores. O resultado é a visualização de uma imagem digital em que cada elemento matricial é chamado de *pixel* e cujo conceito frequentemente é confundido com o de resolução (CRISP, 2012). Tratando-se de uma matriz onde são representados digitalmente os dados e não propriamente uma imagem, a unidade de informação será denominada célula, ou elemento de grade.

O conceito de escala é expresso como a relação entre as dimensões de um desenho e objeto por ele representado (HOUAISS, 2009). Traz implícito um grau de generalização das informações contidas no produto. Isto se associa também à ideia de resolução vinculada à amostragem e de certa forma também à ideia de generalização. Apresenta-se um paradigma vinculado à resolução na Figura 1 e entende-se que ela pode ser ainda compreendida de duas outras maneiras distintas:

- a) Como o espaçamento entre duas observações; esta definição implica que as observações devem ser regularmente espaçadas. Esta é a ideia empregada neste trabalho e,
- b) Como a menor unidade de leitura direta disponível. Este é um conceito usualmente empregado nas observações diretas (como medidas de distâncias), mas que se torna de difícil aplicação para as imagens. Entender que a menor unidade de leitura direta seja o tamanho do elemento matricial de imagem (*pixel*<sup>1</sup>) (ou uma célula) seja a menor unidade de leitura direta não convém a esta pesquisa porque algumas vezes é necessário reamostrar a grade ou a imagem com objetivos específicos, não apresentados aqui.

---

<sup>1</sup> *Pixel*: PICture ELe ment. Do inglês: elemento de imagem (ANTAS, 20??, p. 616). A menor unidade distinguível numa imagem digital.

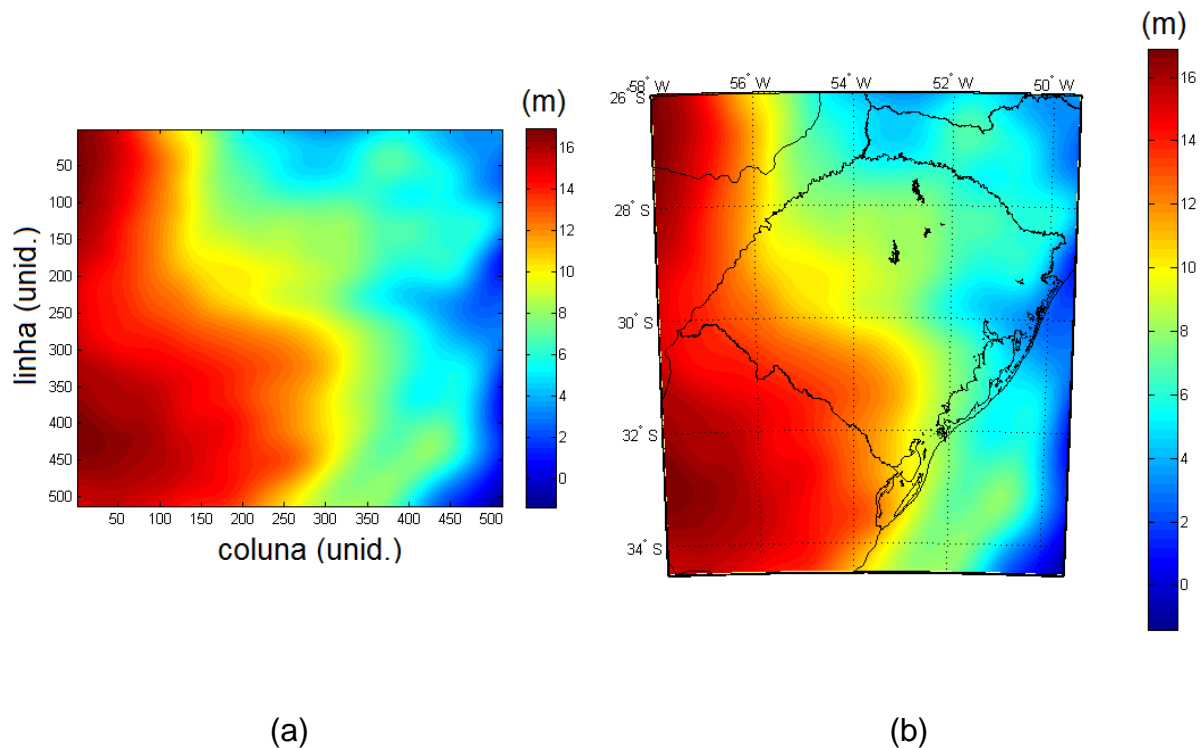


**FIGURA 1** - Resolução, como empregado na Tese, versus tamanho do pixel. FONTE: O Autor.

A referida concepção b) de resolução não pode ser considerada como verdade absoluta pois, por exemplo, a informação relevante pode ocupar duas ou mais células. Esta possibilidade é vislumbrada na Figura 1, onde a ideia de qualidade informacional baseada neste conceito pode ser distorcida posto os argumentos do item b, na frase anterior. Além disso, o processo de Interpolação/Extrapolação permite que as informações sejam reamostradas para tantas células quantos o operador necessitar. Este fato acontece com frequência em Geodésia na grande maioria das operações com integrais porque seus elementos diferenciais são na realidade discretizados na forma de elementos finitos. Contrariamente a este fato, as observações na maior parte das vezes são heterogêneas em termos da sua amostragem espacial. O caso mais comum é o das observações gravimétricas - em geral, sobre linhas de nivelamento - a partir das quais se obtém anomalias da gravidade - em uma grade regular - necessárias à Integral de Pizetti-Stokes (IntPS). Este problema é abordado na seção 2.2.

Nesta pesquisa a magnitude de uma observação acaba sendo tratada como o valor numérico de uma célula e a sua posição espacial é considerada a posição dentro de uma matriz que é compatibilizada com um Sistema Geodésico de Referência (SGR). Por exemplo, respectivamente apresenta-se nas Figuras 2 (a) e 2 (b), uma solução na forma matricial de alturas geoidais provenientes do modelo GOCO02S (GOINGINGER, et. al., 2011) e sua compatibilização com uma base cartográfica. A figura 2.2, por exemplo, é um arranjo matricial composto por 512 linhas e 512 colunas cuja escala varia da menor magnitude do elemento, de cor igual a zero, até o elemento de maior magnitude, com cor igual a 255. É uma matriz de dados, portanto, representada em 8 bits.

O esclarecimento é conveniente porque a observação original está contida em um único *pixel* e tem como principal consequência a materialização do ponto onde há a informação (o ponto torna-se uma área), ou seja, algumas observações, embora sendo pontuais, associam-se a elementos finitos de área, do tamanho do *pixel* onde as informações são, na respectiva posição, apresentadas. Esta seção tem especial importância porque todo o desenvolvimento teórico deste trabalho está concentrado na transformação de quantidades discretas em imagens. Devido à referida transformação, os conceitos de resolução, aproximação e detalhe estão bem presentes como é possível perceber na sequência.



**FIGURA 2-** Representação digital dos dados. Na forma matricial original (a). Com a base cartográfica associada (b). FONTE: O Autor.

## 2.2. Metodologias para a Avaliação de Alguns Modelos Integrais Aplicados em Geodésia

Um dos pilares da Geodésia Física é calcado na Teoria do Potencial, de tal forma que as funcionais associadas ao Geopotencial são usualmente expressas via modelos contínuos, em geral na forma integral, e obtidas usualmente de forma indireta com base em outras grandezas com amostragem discreta. Atualmente, os

aspectos físicos têm sido levados em consideração em um grande número de aplicações das mais gerais às mais específicas. Os aspectos mais gerais são aqueles associados ao fluxo de massas dentro da dinâmica planetária do sistema Terra, envolvendo as interações entre criosfera, atmosfera, hidrosfera, geosfera e biosfera e que se refletem no campo da gravidade, na rotação planetária e em aspectos geocinemáticos. Já, os aspectos mais específicos, vinculados às interações da Geodésia com um grande número de áreas científicas e aplicadas, podem ser entendidos como associados a um determinado conjunto de produtos baseados em funcionais relacionados à posição espacial, campo da gravidade, variações temporais e respectivos referenciais.

Nesta seção, contemplando-se os aspectos gerais e específicos, são apresentadas, sucintamente, as metodologias e conceitos necessários à avaliação de modelos integrais em Geodésia, buscando-se manter o formalismo conceitual da Geodésia, porém aproveitando-se das facilidades oferecidas pelos métodos numéricos - com destaque à integração numérica - utilizados no processamento dos dados associados. Convém mencionar que tal integração (seção 2.2.1) é considerada um processo moroso, mesmo diante dos avanços em *hardware* e tomando-se como referência espaços de integração relativamente pequenos (e.g., da ordem de  $1^\circ \times 1^\circ$ ). Esta morosidade ocorre porque laços de repetição combinados com testes de comparação utilizados na varredura espacial requerem que processos análogos (e.g. rotinas do tipo “*for*”) sejam executados tantas vezes quanto o número de elementos da matriz envolvida. Os laços de repetição formam o somatório do produto de quantidades associadas ao potencial anômalo (e.g. anomalias da gravidade, distúrbios da gravidade, etc.) com o *kernel*<sup>2</sup> utilizado (e.g. Stokes, Hotine, etc.) e com o elemento de área. Este é o caso, por exemplo, da (2.2), a seguir. Sob o pretexto da lentidão, também se utilizam outras técnicas numéricas e recursos matemáticos. Tal é o caso da FFT seguida da convolução, apresentada na seção 2.2.3, que possibilita minimizar esta dificuldade e com as expectativas apresentadas no parágrafo que segue. Os aspectos dedutivos ligados à Teoria do Potencial com finalidades geodésicas podem ser encontradas em diversas bibliografias (e.g. HEISKANEN & MORITZ, 1967; LAMBECK, 1988; GEMAEL, 1999).

---

<sup>2</sup> destaca-se esta nomenclatura por ser usual em vez da tradução *núcleo*

Na seção 2.2.3, embora se apresente a FFT seguida de convolução como alternativa numérica para a resolução de integrais geodésicas, a sua importância como ferramenta para a análise de sinais reside na obtenção das frequências das constituintes fundamentais de um determinado fenômeno amostrado. Destaque-se que a FFT trata a série espacial ou temporal como se composta de parcelas periódicas constantes em amplitude e frequência em todo o seu intervalo finito (de espaço ou duração). Neste contexto, mais uma vez argumenta-se em favor das *wavelets* como sendo ferramentas promissoras dentro do escopo das Ciências Geodésicas. As *wavelets*, sendo sinais de suporte compacto, possibilitam detectar variabilidades para intervalos amostrais muito mais curtos do que aqueles usuais para a FFT. Assim, podem ser utilizadas séries amostrais com quebras, degraus ou descontinuidades, e as variações do conteúdo espectral que podem ser distinguidas. Dentro de uma perspectiva da aplicabilidade na modelagem do geopotencial e obtenção de funcionais associados, anisotropias localizadas podem, por exemplo, ser evidenciadas e assim, identificadas regiões onde há a carência de observações necessárias à obtenção de Modelos Globais ou Locais do Geopotencial.

#### 2.2.1. O processo de integração numérica e a metodologia *remove-restore* (RR) segundo a visão clássica

As integrações numéricas referidas nesta seção compreendem a generalização do conhecimento associado à solução de integrais clássicas aplicadas às Ciências Geodésicas. Tratando-se os integrandos de elementos amostrais como sendo discretos, as respectivas integrais não podem ser resolvidas de forma analítica. Assim, na prática, os elementos infinitesimais são substituídos por elementos finitos e as integrais são substituídas por somatórios. Cabe lembrar que, no entanto, nem sempre a integração propriamente dita é o principal aspecto envolvido na busca do estabelecimento de soluções para problemas geodésicos (PEREIRA e DE FREITAS, 2010), sobressaindo-se, muitas vezes, a compatibilização entre diferentes grades e referenciais envolvidos. O caso mais geral nas ciências geodésicas é a integração de elementos diferenciais de área, como na Integral de Pizetti-Stokes, que relaciona a altura geoidal ( $N$ ) com anomalias da gravidade ( $\Delta g$ ) e com a função de Stokes  $S(\psi)$ :

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g \cdot S(\psi) \cdot d\sigma \quad (2.1)$$

Os demais elementão são :

$R$	raio de Bjerhammar,
$\gamma$	gravidade normal,
$\sigma$	superfície geoidal
$\square \sigma$	Elemento diferencial de área da superfície geoidal

Os elementos diferenciais da (2.1) passam a ser considerados elementos finitos e os termos que os multiplicam passam a ser coeficientes dos elementos finitos – generalização esta adotada em Heiskanen & Moritz (1967, p. 118). No contexto deste trabalho, esta solução é denominada integração numérica porque a sua avaliação nada mais é do que a interpretação neste sentido. Ela é apresentada em Heiskanen & Moritz (1967, p. 118 e p. 96):

$$N = \frac{1}{4\pi\gamma \cdot R} \sum (S(\psi) \cdot \text{sen}(\varphi) \Delta g \cdot q) \quad (2.2)$$

Em que

$$q = R_1^2 \cdot \Delta\sigma \quad (2.3)$$

Nas (2.1), (2.2) e (2.3) os símbolos que ainda não foram apresentados significam:

$R_1$	Raio de um círculo que tem área igual à da célula utilizada no cálculo
$q$	elemento finito de área e
$\Delta\sigma$	Elemento discreto de área de superfície geoidal

Ao buscar a solução prática das integrais geodésicas, muitas vezes o programador/calculista recai em indefinições matemáticas. Nos somatórios, indeterminações surgem rotineiramente e uma análise cuidadosa também é necessária para prover solução sem estas singularidades. A principal indeterminação da (2.1) ocorre devido à função de Stokes com a avaliação do efeito



da anomalia da gravidade sobre o próprio ponto. A função de Stokes é apresentada na sequência como equação (2.8).

As anomalias da gravidade utilizadas neste trabalho (*Bouguer e free-air*) podem ser calculadas conforme Heiskanen e Moritz (1967) como:

$$\Delta g_{Bouguer} = g + 0,1967 \cdot H - \gamma \quad (2.4)$$

$$\Delta g_{free-air} = g + 0,3086 \cdot H - \gamma \quad (2.5)$$

em que  $g$  é a gravidade observada na Superfície Física da Terra (SFT);  $H$  é a altitude do ponto onde foi feita a observação;  $\gamma$  é a gravidade normal sobre o elipsoide.  $\Delta g_{Bouguer}$  e  $\Delta g_{free-air}$  são as anomalias da gravidade denominadas pelos seus índices. Cabe lembrar que outros tipos de anomalias da gravidade podem ser obtidos e não serão tratados aqui.

O valor da anomalia da gravidade ( $\Delta g$ ) utilizado na (2.1) é obtido a partir de uma grade regular de anomalias da gravidade residuais  $\Delta g_{residuais}$  oriundas de um processo de subtração, conhecido como *remove*: a grade de anomalias da gravidade proveniente de valores da gravidade observados ( $\Delta g_{observado}$ ) é subtraída de uma grade regular de anomalias geradas a partir de um MGG ( $\Delta g_{MGG}$ ) e somadas com Correções do Terreno ( $TC$ ) (e.g. BAJRACHARYA, 2003, p. 42). As duas últimas grades devem ter o mesmo número de linhas e colunas que a primeira para que as diferenças sejam realizadas matricialmente. Assim etapas de interpolação são necessárias nesta compatibilização. As operações descritas acima são comumente apresentadas como:

$$\Delta g_{residuais} = \Delta g_{observada} - \Delta g_{MGG} + TC \quad (2.6)$$

que segue a sequência:

- a) Observam-se valores da gravidade nos pontos de interesse, preferencialmente onde a informação altimétrica é conhecida;
- b) Das observações da gravidade, obtém-se anomalias da gravidade, em geral, do tipo *Bouguer*. A escolha de anomalias *Bouguer* tem somente caráter auxiliar devido à sua baixa correlação com o terreno para os curtos comprimentos de onda do geopotencial, que permite a predição sem o auxílio de modelos que dependam de outras quantidades. É

apropriado mencionar o fato de que a obtenção das anomalias *Bouguer* só pode ser efetivada conhecendo-se a altitude do ponto onde foi feita a observação gravimétrica (verifique-se a dependência de  $H$  apresentada na (2.4)).

- c) Gera-se uma grade regular de anomalias *Bouguer* (etapa de predição/interpolação), com número de linhas e colunas escolhido convenientemente;
- d) Via o conhecimento de um Modelo Digital de Altitude (MDA), a partir da grade de anomalias *Bouguer* calcula-se uma grade regular de anomalias da gravidade *free-air*. Este resultado é utilizado na (2.6) e se chama  $\Delta g_{observada}$ . É desejável que os *data* verticais empregados sejam sempre os mesmos, sob a pena de absorção dos efeitos associados à Topografia do Nível Médio dos Mares (TNMM), que situar-se em  $\pm 2$  metros (HECK, 1990 apud PAN & SJOBERG, 1996).

Após estas etapas, e subtração adequada entre as grades, a integração é realizada utilizando  $\Delta g_{residuais}$  e resulta em uma grade de alturas geoidais residuais ( $N_{residual}$ ). Para obter o efeito total em um ponto  $p$  ( $N_p$ ),  $N_{residual}$  necessita ser adicionado aos efeitos globais ( $N_{MGG}$ ) e ao efeito indireto ( $EI$ ) - quando for o caso, como na (2.7). O efeito indireto é um efeito associado com o desconhecimento do geóide no momento das reduções gravimétricas (HEISKANEN e MORITZ, 1967). Estas servirão ao posterior cálculo do geóide.

A etapa mencionada no parágrafo acima é conhecida como *restore* e pode ser expressa como:

$$N_p = N_{residual} + N_{MGG} + EI \quad (2.7)$$

O conjunto de operações (2.2), (2.6) e (2.7), adicionadas às demais considerações, denomina-se processo *remove-restore* apresentado, por exemplo, por Yildiz et al. (2012), Hoffmann-Wellenhof e Moritz (2006, pp. 379-388) e Sansó e Sona (1993). Este processo é uma técnica baseada na decomposição espectral.

Uma etapa importante do processo de decomposição espectral é o cálculo da função de Stokes, apresentada na (2.8) de acordo com Heiskanen & Moritz (1967, p. 94):

$$S(\psi) = \frac{1}{s} - 4 - 6s + 10s^2 - (3 - 6s^2) \ln(s + s^2) \quad (2.8)$$

em que

$$s = \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (2.9)$$

e  $\psi$  é a distância esférica entre os dois pontos. Se, numa rotina de varredura o ponto de avaliação passar pelo ponto de cálculo, então a (2.9) se anula e a (2.8) torna-se uma indeterminação. Para este ponto particular a (2.1) é substituída pela (2.10) (HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ, 2006):

$$N = \frac{1}{\gamma} R \cdot \Delta g_p \quad (2.10)$$

$R$  é o raio de um círculo que tem área igual a área da quadrícula discreta utilizada e  $\Delta g_p$  é a anomalia da gravidade representativa daquela quadrícula.

Os cálculos apresentados nesta seção representam a visão clássica do cálculo do geoide e a principal característica desta visão é a necessidade de se conhecer o valor da altitude para os pontos onde deve ser efetuado o cálculo de anomalias da gravidade. Este fato estabelece um forte contraponto, que, mesmo não sendo o escopo desta tese, é oportuno estabelecer:

*Necessita-se da altura geoidal para utilizá-la em conjunto com altitudes provenientes de sistemas GNSS para se obter altitude com significado físico. No entanto, para o cálculo de  $N$  necessita-se reduzir a gravidade à superfície que vai ainda ser determinada.*

No caso do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) vislumbra-se uma possível resposta à necessária modernização da Rede Altimétrica Fundamental Brasileira (RAFB), tal preconizada por Luz (2008). Existe uma abordagem mais moderna para a determinação do geoide ou quase geoide a qual é menos suscetível a efeitos não desejáveis associados principalmente a reduções a superfícies ainda hipotéticas. Estes aspectos e tal suscetibilidade serão caracterizados na seção 2.2.2.

O processo de decomposição espectral contido na *remove-restore* (RR) é a principal técnica para a solução do Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG). A abordagem numérica para a integral de Stokes discutida nesta seção pode ser generalizada para as Fórmulas de Venning-Meinesz associadas à determinação das componentes da deflexão da vertical, para as fórmulas de correções do terreno, MDAs, além de outras que se utilizam de varredura sobre grades.

### 2.2.2. A integração numérica e a técnica RR segundo a visão moderna

A visão moderna de obtenção de uma superfície de referência para as altitudes, ou seja, o cálculo do quase geoide - referência para a obtenção das altitudes normais - utilizando-se do RR está ligada aos estudos de M.S. Molodenskii. Mais recentemente, principalmente em decorrência da melhor determinação da superfície física com o GNSS, surgiu a versão denominada de fixada para a solução do PVCG onde se utiliza a Superfície Física da Terra (SFT) como Superfície de Contorno em substituição ao geoide, utilizado na teoria clássica. Todas estas superfícies são apresentadas na Figura 3. A visão de Molodenskii data de 1945 (BOMFORD 1980, p.463; HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ, 2006) e o marco principal associado a este conhecimento é a obra traduzida para o inglês de Molodenskii, Eremeev e Yurkina, de 1962 (MOLODENSKY et al., 1962). O detalhamento desta teoria é encontrado em Heiskanen e Moritz (1967) e em Hofmann-Wellenhof & Moritz (2006).

Nesta visão, a integral de Stokes é substituída por (HEISKANEN & MORITZ, 1967):

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} (G_0 + G_1 + \dots) S(\psi) d\sigma \quad (2.11)$$

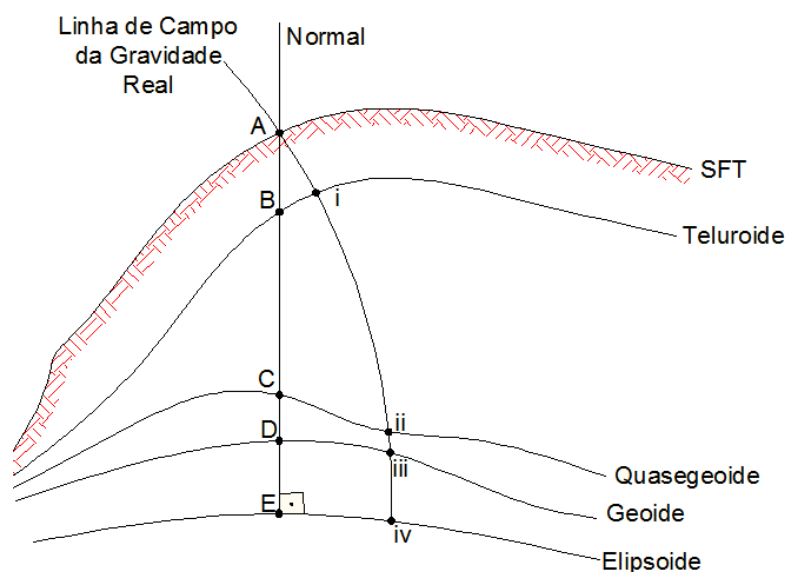
em que os termos  $G_0$  e  $G_1$  podem ser aproximados como (MORITZ, 1980, p 362;p.416):

$$\begin{aligned} G_0 &\approx \Delta g_M \\ G_1 &\approx TC \end{aligned} \quad (2.12)$$

em que  $\Delta g_M$  sendo a anomalia da gravidade obtida pela diferença da gravidade observada em um ponto do terreno e a gravidade teórica calculada para a projeção normal deste ponto no teluroide, portanto não envolvendo reduções e a necessidade do conhecimento da estrutura da crosta.  $TC$  é a correção do terreno na sua forma planar. As  $TC$ , além de serem utilizadas no cálculo do geoide segundo a teoria clássica, também se prestam a duas finalidades importantes: a) preencher o requisito de que devem inexistir massas externas ao geoide e b) melhorar a resolução dos modelos, tanto na visão clássica como na visão moderna. Mais detalhes sobre a correção do terreno podem ser encontrados, por exemplo, em Pick (1987) e a sua implementação digital pode ser feita segundo Nagy (1966).  $\zeta$  é a anomalia de altitude e estabelece importantes relações do teluroide com a SFT e do elipsoide de referência com o quasegeoide, como pode ser visualizado na Figura 3 e relacionado no Quadro 1. Cabe lembrar que aqui foram suprimidos os termos de ordem superior apresentados como reticências na (2.11).

Também é possível relacionar as anomalias de altitude com as alturas geoidais em função de um conhecimento aproximado da anomalia de Bouguer na forma (HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ, 2005, p.326):

$$N = \zeta + \frac{\Delta g_{Bouguer}}{\bar{\gamma}} \quad (2.13)$$



**Figura 3** – Superfícies de referência.

FONTE: Adaptado de Hofmann-Wellenhof & Moritz (2005, p.324 e 327).

Da Figura 3, tem-se que:

**Quadro 1** - Elementos dispostos na Figura 3. FONTE: O Autor.

Segmento	Significado
A-B	Anomalia de Altitude ( $\zeta$ )
B-E	Altitude Normal ( $H^*$ )
iii-iv	Altura Geoidal ( $N$ )
A-iii	Altitude Ortométrica ( $H$ )
C-E = A-B	Anomalia de Altitude ( $\zeta$ )
A-E	Altitude elipsoidal ( $h$ )

A anomalia da gravidade no sentido da Teoria de Molodenskii é dada pela (2.14):

$$\Delta g_M = g_P - \gamma_Q \quad (2.14)$$

em que,  $g_P$  é a gravidade medida na SFT e  $\gamma_Q$  é a gravidade calculada no teluroide. O teluroide é uma superfície - tomando-se a Figura 3 como referência - na qual o esferopotencial  $U$  do ponto **B** é igual ao geopotencial  $W$  do ponto **A**. As ideias, conceitos e implicações associadas com  $U$  e  $W$  estão presentes em obras tradicionais relacionadas às Ciências Geodésicas (e.g. TORGE, 2002; HEISKANEN & MORITZ, 1967; GEMAEL, 1999).

A gravidade é calculada sobre o teluroide com o conhecimento da altitude normal do ponto (HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ, 2005).

De forma similar à (2.6), a etapa *remove* da visão moderna fica:

$$\Delta g_{\text{residuais}} = \Delta g_{\text{observada}} - \Delta g_{MGG} - \Delta g_{RTM} \quad (2.15)$$

em que, novamente:

- $\Delta g_{\text{observada}}$  é uma grade regular de anomalias da gravidade calculadas a partir de valores da gravidade observados na SFT,
- $\Delta g_{MGG}$  é uma grade regular de anomalias da gravidade geradas a partir de coeficientes de um MGG e,
- $\Delta g_{RTM}$  são anomalias da gravidade calculadas pela metodologia *Residual Terrain Model* (FORSBERG & TSCHERNING, 1981; HIRT et Al., 2010).

O *Residual Terrain Model* (RTM) tem como princípio norteador a seguinte ideia:

- a) Obtenção do potencial gerado por prismas cujas altitudes são função de diferenças da altitude de um MDA relativamente ao mesmo modelo, ou suavizado, ou filtrado, ou truncado num determinado grau  $m$  e ordem  $n$ ,
- b) Transformação deste potencial em anomalias da gravidade, na etapa *remove*, ou
- c) anomalias de altitude, na etapa *restore*.

A suavização, filtragem ou truncamento (Etapa *remove*, (2.6)) implicam necessariamente na eliminação dos curtos/curtíssimos comprimentos de onda do geopotencial na etapa *remove* para que se obtenha uma superfície suave e regular, requisito necessário à (2.11). Considere-se aqui a importância em conhecer-se onde exatamente o modelo foi truncado, ou seja, em que grau foi obtido em termos de sua suavização ou filtragem. A não consideração deste fato pode gerar vazios espectrais na solução da (2.16) conhecida como etapa *restore*. Após a integração e conservando-se os subíndices, esta etapa fica:

$$\zeta_p = \zeta_{residual} + \zeta_{MGG} + \zeta_{RTM} \quad (2.16)$$

A versão fixada também apresenta uma solução, onde a quantidade de trabalho é o distúrbio da gravidade (HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ, 2005):

$$\delta g = g_p - \gamma_p \quad (2.17)$$

$\gamma_p$  é gravidade calculada na SFT utilizando a altitude elipsoidal e parâmetros do Sistema de referência fornecidos, por exemplo, pela mesma referência da (2.17) (Id.). Tal como dantes, há uma etapa *remove* e há uma etapa *restore*:

$$\delta g_{residuals} = \delta g_{observada} - \delta g_{MGG} - \delta g_{RTM} \quad (2.18)$$

$$\zeta_p = \zeta_{residual} + \zeta_{MGG} + \zeta_{RTM} \quad (2.19)$$

O raciocínio segue o mesmo das equações anteriores.  $\delta g_{RTM}$  e  $\zeta_{RTM}$  são obtidos da transformação do potencial das massas atrativas nas respectivas quantidades e  $\zeta_{residual}$  na (2.19), idêntica à (2.16) é obtido da integração via o *kernel* de Koch (Ibidem), não apresentado aqui.

As vantagens relativamente à visão clássica na modernização da RAFB, substituindo as atuais altitudes ortométrica-normais por altitudes normais, estão associadas a muitos aspectos, dentre os quais, é possível destacar:

- I - O cálculo da anomalia da gravidade no sentido da Teoria de Molodenskii não faz redução do valor da gravidade. Na teoria clássica, o cálculo da anomalia da gravidade implica em reduzir a gravidade observada na SFT até o geoide e assumindo-se, por exemplo, valores de densidade constantes ao longo da linha de campo da gravidade. Assim, efeitos de variação lateral de densidade, na visão moderna, são minimizados;
- II - Existem estudos (e.g. LUZ, 2008; FERREIRA, 2011) indicando que a RAFB tem características normais (e.g. FEATHERSTONE & KUHN, 2006). Esta característica, em termos práticos, facilita o cálculo dos valores da gravidade sobre o teluroide uma vez que minimiza as etapas que incluem processos de predição/interpolação, além de minimizar os efeitos de redução da gravidade até o geoide. Nestes particulares, é conveniente ressaltar a impossibilidade de modelagem determinística de algumas quantidades associadas ao geopotencial, sobretudo, o relevo;
- III- O emprego em larga escala de sistemas de navegação global (*Global Navigation Satellite System* - GNSS) que fornece com precisão sem precedentes a altitude elipsoidal  $h$  e, a expansão da Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC), que subsidia processamentos relativos vinculados ao Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas (SIRGAS), possibilita a reocupação de pontos remanescentes da RAFB, sem o nivelamento geométrico e, principalmente, permitindo verificações de estabilidade, escala, etc., além de auxiliar na materialização de novos pontos;
- IV- Os MDA têm apresentado grande evolução em termos de resolução espacial e acurácia. Também os MGGs estão em constante evolução e sofreram melhoria considerável a partir das missões da gravimetria por



satélite CHAMP, GRACE e GOCE. A grande maioria destes modelos admite como referência a abordagem moderna de cálculo e em consequência a adoção do quasegeoide como superfície de referência.

### 2.2.3. As Integrações Geodésicas a partir de transformadas de Fourier e do teorema da convolução

*Por muitos anos, a abordagem clássica utilizada para avaliação eficiente de Integrais Geodésicas tem sido baseada na Transformada Rápida de Fourier (EL HABIBY & SIDERIS, 2006a). O extrato tem como origem a já citada morosidade computacional na resolução das integrais numéricas (SIDERIS & FOTOPOULOS, 2008, p. IV-6) e a problemas de singularidade. Convém lembrar que as dificuldades relacionadas à singularidade também podem ocorrer com a Transformada de Fourier (ZHANG et Al., 1995) e, logicamente, com as suas variantes.*

A transformada rápida de Fourier (FFT - do inglês *Fast Fourier Transform*) é um algoritmo de otimização computacional para a transformada de Fourier discreta (DFT - *Discrete Fourier Transform*). Esta é uma transformação baseada na multiplicação de uma exponencial complexa (ou sua forma equivalente, em senos e cossenos) por uma função base (e.g. anomalias da gravidade). A DFT inversa (IDFT - *Inverse Discrete Fourier Transform*) é a decomposição do sinal transformando o sinal processado em uma combinação linear de todas as exponenciais complexas com frequências pertencentes ao intervalo  $-\pi < \omega < \pi$ . Este parágrafo sintetiza as ideias apresentadas em Hayes (2006, pp. 75-78) onde maiores informações sobre a DFT no domínio do tempo podem ser encontradas. Aqui, assume-se também que as variáveis temporais podem ser substituídas pelas espaciais sem prejuízo formal do conceito.

A DFT de um sinal  $x(n)$  e sua inversa são dadas respectivamente por (Ibid.):

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} \quad (2.20)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} \cdot d\omega \quad (2.21)$$

Nas (2.20) e (2.21)  $j$  é a variável complexa e  $\omega$  é a frequência angular do sinal/ruído.

Nestas, vale o Teorema da Convolução, o qual afirma que a multiplicação no domínio de tempo corresponde à convolução (periódica) no domínio da frequência (Ibid). Isto é importante, pois uma integração no domínio do tempo (ou espaço) pode ser substituída pela convolução (que nada mais é que o produto das transformadas no domínio das frequências).

$$x(n)y(n) \stackrel{DFT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \quad (2.22)$$

$\theta$  é o tamanho do passo dado no momento da translação vetorial.

A (2.22) expressa a propriedade que torna possível a maximização da velocidade na resolução das integrais geodésicas, uma vez que dois ou mais sinais podem ser operados no domínio das frequências sem alteração no resultado. No domínio das frequências, o produto entre duas matrizes é uma convolução, ou seja, um processo que envolve somente multiplicação e soma de elementos dentro de vetores em função da sua posição (bidimensionalmente, os vetores são tomados linha à linha, ou coluna à coluna).

A maior rapidez relativa nos cálculos é manifestada porque a varredura sobre a matriz ocorre então uma única vez, diferentemente da integração tradicional, onde para cada elemento da matriz resultado uma varredura completa é necessária.

Para a (2.1), a DFT é realizada bidimensionalmente, em latitude e em longitude. Assim, o Teorema da Convolução é aplicado à uma grade de anomalias da gravidade e a uma grade de elementos do *kernel* utilizado. Daqui em diante, para manter a notação dos autores, se expressa a FFT como operação representativa da DFT e a IFFT (*Inverse Fast Fourier Transform*) como representativa da IDFT. Conforme Sideris (2008) têm-se, na forma planar:

$$N(x_p, y_p) = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{\sigma} \frac{\Delta g(x, y)}{\sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2}} dx dy = \frac{1}{\gamma} \Delta g(x_p, y_p) * l_N(x_p, y_p) \quad (2.23)$$

Em que (Ibid.):

$$l_N(x, y) = \frac{1}{(2\pi)(x^2 + y^2)^{0.5}} \quad (2.24)$$

É o *kernel* planar da Função de Stokes.

Ainda de acordo com o mesmo autor, o seguinte procedimento é descrito:

a) Primeiramente, faz-se a FFT das anomalias da Gravidade:

$$FFT[\Delta g(x_p, y_p)] \quad (2.25)$$

b) Depois se repete o procedimento para o *kernel* utilizado:

$$FFT[l_N(x, y)] \quad (2.26)$$

c) Em seguida, faz-se a convolução da (2.25) com a (2.26):

$$FFT[\Delta g(x_p, y_p)] \cdot FFT[l_N(x, y)] \quad (2.27)$$

d) Por último, faz-se a IFFT e multiplica-se pelo inverso da gravidade (considerando a propriedade associativa):

$$N(x, y) = \frac{1}{\gamma} IFFT\{FFT[\Delta g(x_p, y_p)] \cdot FFT[l_N(x, y)]\} \quad (2.28)$$

em que a IFFT é a Transformada de Fourier Inversa. Então, têm-se as alturas geoidais dos pontos valendo-se da FFT, da IFFT e do Teorema da Convolução sem efetuar-se a integração numérica diretamente. Nas (2.24), (2.25), (2.26) e (2.27) é suprimido pelo autor o fato das transformadas serem bidimensionais. As transformadas bidimensionais são realizadas segmentando-se as matrizes ou em linhas ou em colunas e fazendo-se a operação ou linha à linha, ou coluna à coluna.

Mais uma vez, é importante lembrar que a operação de integração em si não é a etapa mais importante do processo. Nesta metodologia, a extração dos longos e curtos comprimentos de onda do sinal não processado está prevista com vistas a evitar/minimizar diversos fenômenos (e.g. contaminação do sinal amostrado) e também validar a técnica, suficiente apenas sob determinadas condições (neste sentido, verificar FORSBURG, 1998). Neste trabalho alguns resultados são baseados em integrais que foram avaliadas utilizando-se um conjunto de programas

fornecidos pela Escola do Geoide (IGeS, 2013) que, por sua vez, foram escritos em termos de Transformadas de Fourier, ora para a Equação de Stokes, ora para a Correção do Terreno, ora outras integrais. Este conjunto de programas também fornece soluções na forma clássica que em alguns casos foram utilizadas para validar as soluções. As expressões utilizadas nos cálculos estão nas referências sobre cada uma das rotinas utilizadas e são encontradas no conjunto de dados que é disponibilizado junto com os programas.

### **2.3. Abordagem Geral de Análise e Síntese e processamento de Sinais Digitais nas Ciências Geodésicas**

A análise de um determinado sinal pode ser compreendida como a obtenção de algumas de suas propriedades. Estas propriedades estão em geral relacionadas com a ocorrência do sinal ao longo do tempo e/ou espaço (frequência) e a intensidade com que ocorrem (amplitude). Deve ser dito que estas propriedades assumem funções importantes quando se necessita mesclar, detectar ou manipular determinadas informações.

Historicamente, a obtenção das características apontadas é realizada utilizando propriedades das Transformadas de Fourier (já introduzidas no contexto das Ciências Geodésicas na seção anterior) via a densidade de potência espectral (PSD) para as transformadas de Fourier, onde a função pode ser decomposta em sinais periódicos e de frequência zero (e.g. variação secular). A PSD é, por definição, uma função que vincula o quadrado da amplitude do sinal analisado por valor de frequência (detalhes sobre a implementação são encontrados, por exemplo, em PRESS et Al., 1992).

Flury (2006) apresenta algumas abordagens para a estimação da PSD no contexto de quantidades associadas ao geopotencial. O periodograma de um sinal  $x_n$ , com comprimento  $N$  é apresentado por diversos autores (e.g. MATHWORKS, 2011) e é dado pela (2.29):

$$S(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{n=1}^N x_n e^{-j\omega n} \right|^2 \quad (2.29)$$

Morettin (1999) cita o periodograma, a transformada de Fourier, a análise de Walsh-Fourier, dentre outras, como metodologias úteis à estimação do espectro. Nas próximas seções será demonstrado que as *wavelets*, a partir de um tipo diferente de decomposição, podem também revelar propriedades interessantes de um sinal.

A dificuldade a ser superada nos casos já apresentados está associada ao fato de que as técnicas baseadas em transformadas de Fourier só funcionam com sinais estacionários. Diz-se que um sinal  $f(x)$  é estacionário ou periódico se a equação (2.30) é válida.

$$f(x) = f(x+T) \quad (2.30)$$

O parâmetro  $T$  é denominado período do sinal.

Na Geodésia, como já manifestado, raramente os sinais podem ser considerados estacionários, tanto no domínio do espaço/tempo como no domínio das frequências. Então, ferramentas e metodologias têm sido estabelecidas para contornar principalmente o problema da não-estacionariedade. São exemplos destas metodologias a Colocação por Mínimos Quadrados (apresentado na seção 2.3.3) e algumas técnicas de inteligência artificial, como as redes neurais artificiais - RNAs (seção 2.3.4).

Outro aspecto importante relacionado às análises tradicionais de sinais é a representação da PSD em função do período completo (eixo de frequências) de ocorrência do sinal. Nesta metodologia, o usuário é capaz de destacar apenas as principais frequências do sinal. As frequências menores, geralmente são tratadas como ruído ou como efeito de contaminação.

No contexto dos dois parágrafos anteriores, os usuários de processamento de sinais vêm se ocupando das *wavelets* como uma ferramenta relativamente nova para o processamento, análise e modelagem de informações. Nesta afirmação, a técnica considerada como estado da arte até então era a *Transformada Janelada de Fourier* (*Windowed Fourier Transform* - WFT) cuja importância conceitual está no fato de que a WFT quebra (ou cria uma janela espacial de tamanho fixo) o sinal em diversos trechos de mesmo comprimento e faz a FFT de cada um deles. Assim, quando se deseja uma análise pormenorizada, é necessário um grande volume de processamento, proporcional ao número de janelas escolhido. Quando se faz a

opção por um pequeno volume de processamento, ou seja, um número pequeno de janelas, corre-se o risco de não detectar as variações de frequência ao longo do tempo ou do espaço. Surgem, daí, as *wavelets* como o *passo seguinte* porque permitem detectar mudanças de frequência bem localizadas e, não obstante, permitem identificar também o instante em que ocorreram essas mudanças, sem mudanças significativas de processamento. Este fato é possível porque as *wavelets* são ondas de período completo e curta duração e, portanto, as correlações podem ser efetivadas por modelos baseados nesta correlação tal que restem resíduos aceitáveis. O raciocínio apresentado nesta última linha toma por base o fato de que as transformadas de Fourier podem ser compreendidas como uma ferramenta que faz a correlação do sinal analisado com um sinal composto por somatórios de senos e cossenos. Não havendo um sinal de período completo, então a Transformada de Fourier é incapaz de fazer uma boa correlação. Como as *wavelets* tem curta duração, então correlações são possíveis para quebras e descontinuidades via a contração (dilatação) e translação da *wavelet* utilizada. Por esta razão, também se atribui o nome de *wavelet* mãe à *wavelet* padrão utilizada para efetivar tal correlação.

Weeks (2007) destaca *que o trabalho com wavelets foi unificado na década de 1980 por Mallat e ganhou relativa popularidade com o padrão JPEG2000, que incorpora o padrão (a análise) multirresolução, apresentado sinteticamente a seguir.*

### 2.3.1. *Wavelets*

São conhecidas aplicações das *wavelets* nos mais diversos campos das ciências. Em especial, nas Ciências Geodésicas, podem ser citados trabalhos relacionados com a análise de sinais maregráficos (e.g. EROL, 2011), com a generalização cartográfica (e.g. GUTMAN & WEAVER, 2012), tantos outros relacionados com as geociências (e.g. KLEES e HAAGMANS,2000), além de muitas correlacionadas com esta tese(e.g., LI e SCHWARZ, 1997; SOLTANPOUR et Al., 2006).

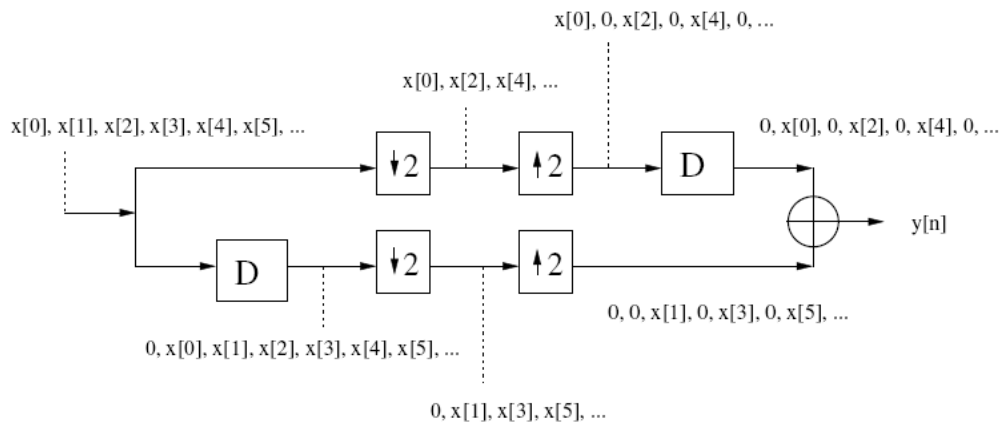
Nesta seção serão discutidos os pormenores referentes à implementação da análise e síntese por *wavelets* visando-se ao atendimento dos objetivos propostos. A abordagem utilizada aqui tem por base àquela apresentada no capítulo referente às

*wavelets* da referência já citada Weeks (2007, p. 275-376). Muitos conceitos apresentados aqui estão referidos àquela obra.

As *wavelets* podem ser compreendidas em um primeiro momento como um conjunto de filtros passabaixa e passa-alta que atuam sobre o sinal original *S*. Nas bibliografias e cursos associados, a componente referente aos longos comprimentos de onda é geralmente denominada (e.g. LIU, 2010) *aproximação A* e a componente associada aos curtos comprimentos de onda é geralmente chamada (Ibidem) de *detalhe D*. Os curtos comprimentos de onda são obtidos por um filtro passa-alta (*High Pass Filter* - HPF) e os longos comprimentos por um filtro passabaixa (*Low Pass Filter* - LPF). A separação dos longos e curtos comprimentos de onda é chamada de *análise* ou *transformada*. A recomposição (*síntese* ou *transformada inversa*) do sinal utiliza filtros inversos IHPF e ILPF onde o I etimologicamente significa *inverse*. A filtragem que subdivide o sinal original em componentes de alta e baixa frequência é conhecida na literatura internacional como *subband coding* (VETTERLI & KOVAČEVIĆ, 2007).

A cada filtragem há uma reamostragem do sinal original em termos de seus índices pares e ímpares para que não se duplique o tamanho da amostra inicial. Esta operação é uma das características que torna as *wavelets* menos suscetíveis às dificuldades de processamento presentes, por exemplo, na Transformada de Fourier, a qual gera saídas do mesmo tamanho que as amostras.

A operação de reamostragem apresentada no parágrafo anterior com *wavelets* durante a análise é conhecida como *downsampling* (e.g. STRANG & NGUYEN, 1997, pp. 87-102). Para recompor o sinal, então há outra operação conhecida como *upsampling* (Ibidem), que é a inversa da citada na frase anterior. Na Figura 4, é demonstrado como esta operação pode ser possível e como ocorre a reconstrução perfeita do sinal a partir das ideias de *downsampling*, *upsampling*, *delay*, análise e síntese. Naquela figura se apresenta a entrada de um sinal com seis amostras. No canal superior, com o *downsampling* são extraídos os elementos pares. No canal inferior, após o *delay* na posição das amostras, são extraídos os elementos ímpares. Depois, os vetores são somados elemento a elemento, reconstituindo o sinal original (*upsampling*).



**Figura 4** - Representação dos coeficientes em um diagrama de filtros.  
 FONTE: WEEKS (2007, p.289)

Embora não seja o escopo desta tese, a abordagem com base em filtros é conveniente porque fornece significado físico claro. Como exemplo, considere-se a *wavelet* de Haar (SWELDENS & SCHRÖDER, 2000, pp. 74-80), que utiliza dois conjuntos de coeficientes:  $\{1/2, 1/2\}$  e  $\{1/2, -1/2\}$  na análise. Estes dois conjuntos respectivamente representam filtros *passabaixa* e *passa-alta*. Para melhor esclarecer o funcionamento da transformada, basta escrever as saídas  $y[n]$  e  $w[n]$  do sistema na forma matemática em termos da posição de um vetor amostral:

$$y[n] = (1/2)x[n] + (1/2)x[n-1] \quad (2.31)$$

$$w[n] = (1/2)x[n] - (1/2)x[n-1] \quad (2.32)$$

onde  $[n]$  é a amostra da posição  $n$  e  $[n-1]$  é a amostra da posição imediatamente anterior em um vetor de amostras. As saídas  $y[n]$  (na Figura 4) e  $w[n]$  (2.32) são saídas cuja entrada é  $X[n] - x[0], x[1], x[2], x[3], x[4], x[5], \dots$

Com a (2.31), é possível observar que  $y[n]$  é uma operação *filtro média móvel* - ou *passabaixa*- e  $w[n]$  é uma operação *filtro passa-alta*; Em  $y[n]$  se faz a média entre o elemento amostral da posição 1 e da posição 2; depois, se faz a média entre os elementos das posições 2 e 3; em seguida, se faz a média entre os elementos das posições 3 e 4, e assim por diante. A saída  $w[n]$  ocorre fazendo-se a diferença entre, num primeiro momento entre os valores, e, depois, entre as médias das posições 1 e 2, depois 2 e 3, e assim, consecutivamente. Esta operação extrai o resíduo entre as médias (na primeira filtragem, trata-se da média entre as amostras). Em  $y[n]$  tem-se, portanto, um filtro passabaixa e em  $w[n]$  um filtro passa-alta.



As saídas  $y[n]$  e  $w[n]$  podem também ser escritas na forma matricial (e.g. BÉNÉTEAU, 2011):

$$\begin{bmatrix} y[n] \\ w[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2_n} & \frac{1}{2_n} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{2_n} & \frac{1}{2_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x} \quad (2.34)$$

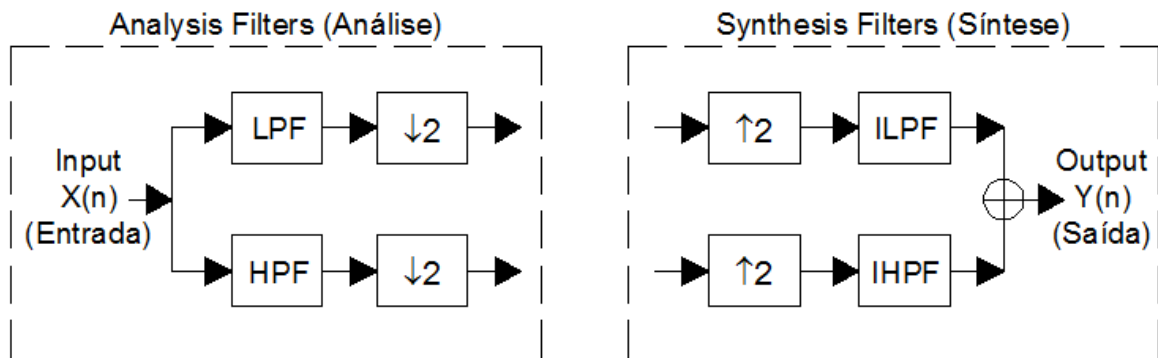
O banco de filtros para as *wavelets* de Haar atua dois a dois elementos. Observe-se então que, para cada amostra, existem duas colunas na matriz de transformação. Se para um outro tipo de *wavelet* o banco de filtros atuar sobre três ou mais elementos da amostra, então três ou mais colunas, respectivamente, deverão ser utilizadas na construção da matriz de transformação  $\mathbf{W}$ .

Obedecendo este raciocínio, a transformada inversa pode ser facilmente encontrada via a manipulação algébrica da (2.34), ou seja:

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{x} \quad (2.35)$$

Nota-se também que os coeficientes os multiplicadores de vetores de tamanho  $n$  que contêm as amostras. No decorrer da Tese, a descrição em termos gráficos é preferível em relação às demais representações (representação analítica e em diagramas) para demonstrar as operações com quantidades Geodésicas. Esta representação está apresentada na sequência desta seção.

Na Figura 5 apresenta-se um diagrama de filtro que é geralmente utilizado para representar *wavelets* quando a decomposição está associada a bancos de dados.

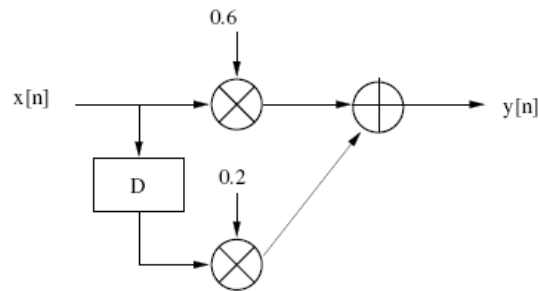


**Figura 5** - Diagrama de Filtros. Análise (esquerda) e Síntese (direita).  
FONTE: Adaptado de WEEKS (2007, p. 276).

Na Figura 5, dois aspectos importantes a) e b) podem ser relacionados:

- a) O primeiro está vinculado com os símbolos  $\downarrow 2$ ,  $\uparrow 2$  e  $\oplus$ . Os dois primeiros significam respectivamente que houve o *downsampling* ou *upsampling* da amostra;  $\oplus$  significa que, após passar pelos ILPF e IHPF, as saídas resultantes são somadas - esta é uma soma simples índice à índice da amostra. Rotineiramente ainda encontra-se os símbolos  $\otimes$  e  $D$ , cujos significados são a multiplicação entre dois vetores e o *Delay* da posição da amostra. O *Delay* atrasa a operação em pelo menos um índice (posição) da amostra no vetor completo e equivale a operação  $x[n-1]$  nas (2.31) e (2.32).
- b) O segundo aspecto está vinculado com a divisão da amostra em duas entradas. Quando um sinal (ou uma amostra) tem duas entradas, diz-se que há uma estrutura de filtros com dois canais. Bancos de filtros com dois canais são usualmente chamados de *subband coders* (daí a expressão *subband coding*) e esta terminologia é usualmente encontrada nos trabalhos que apresentam *wavelets* porque dois sistemas de filtros com estas características são largamente empregados: os *quadrature mirror filters* (QMF) e os *conjugate quadrature filters* (CQF). A diferença entre ambos refere-se aos coeficientes que são utilizados. Um inverte os sinais dos coeficientes e o

outro, as posições dos coeficientes e os sinais. Os coeficientes dos filtros em geral estão apresentados junto aos diagramas de filtros, como na Figura 6.



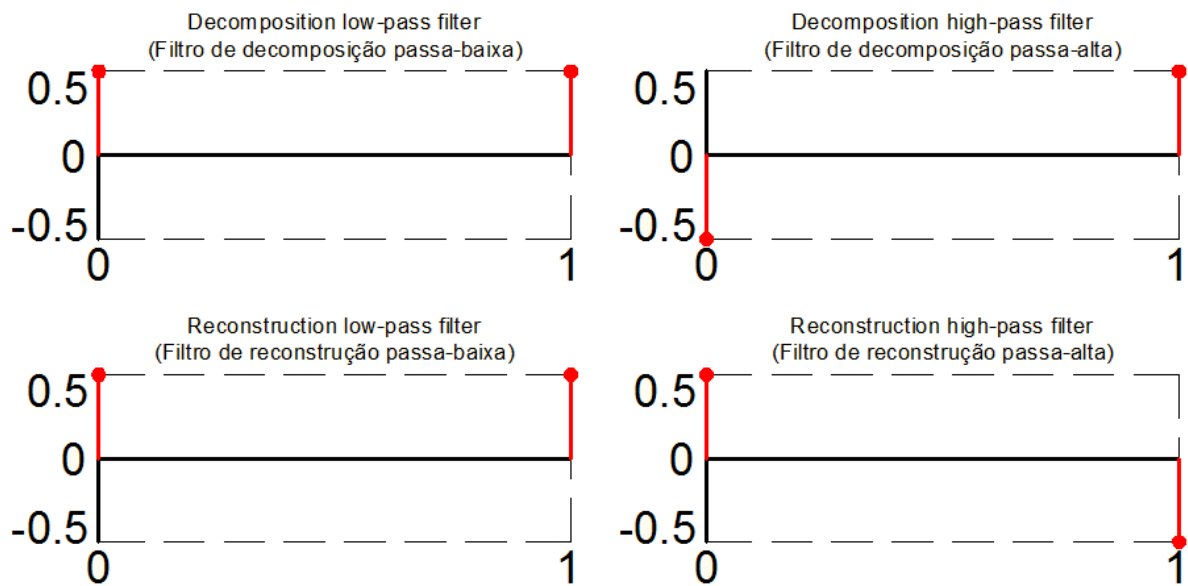
**Figura 6** - Representação dos coeficientes em um diagrama de filtros.  
FONTE: WEEKS (2007, p.92)

Na Figura 6, os coeficientes são  $\{0.6, 0.2\}$  e o sistema pode ser escrito matematicamente como:

$$y[n] = (0.6)x[n] + (0.2)x[n-1] \quad (2.36)$$

O caso da (2.36) pode ser generalizado para diferentes classes de *wavelets*. Estas classes podem ser diferenciadas pelas propriedades que cada *wavelet* é capaz de gerar e as suas diferentes formas de geração estão relacionadas somente com a magnitude e o número de coeficientes utilizados.

Como indicado anteriormente, outra maneira útil de apresentar as *wavelets* (ou apresentar os coeficientes dos filtros) é de modo gráfico. No modo gráfico, as ordenadas representam a magnitude dos coeficientes e as abscissas a posição no vetor onde o coeficiente será aplicado. Considere-se, por exemplo, a Figura 7, para as já apresentadas *wavelets* de Haar:



**Figura 7** - Representação gráfica de filtros para *wavelets* de Haar. FONTE: Adaptado de WEEKS (2007).

Na Figura 7 (na figura: *Decomposition*) estão representados exatamente os mesmos elementos da (2.31) e da (2.32). Os coeficientes de decomposição  $\{1/2, 1/2\}$  para os longos comprimentos de onda estão na componente acima e à esquerda. Para os curtos comprimentos de onda, os coeficientes  $\{-1/2, 1/2\}$  estão acima e à direita (de forma invertida). Na linha abaixo, estão apresentados os coeficientes de síntese (na figura: *Reconstruction*). De forma generalista, o eixo das ordenadas apresenta a magnitude do coeficiente, e o eixo das abscissas, a posição dentro do vetor no qual o coeficiente será aplicado.

A forma matemática das *wavelets* de Haar para esta filtragem (*Decomposition*) é equivalente às (2.31) e (2.32):

$$y[n] = (1/2)x[n] + (1/2)x[n-1] \quad (2.37)$$

$$w[n] = -(1/2)x[n] + (1/2)x[n-1] \quad (2.38)$$

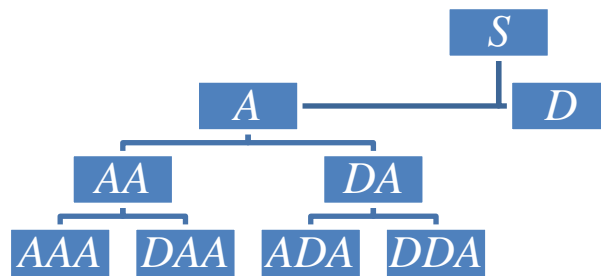
A inversão dos sinais para a (2.38) relativamente à (2.32) não gera qualquer alteração do efeito final. A mesma inversão é percebida na estrutura matricial da transformada apresentada pela (2.33).

Pode-se perceber que, embora a expressão em termos de vetores seja usualmente mais simples para a programação, a visualização do comportamento do

filtro é mais útil na forma gráfica. Assim, como já manifestado, a forma gráfica será preferível para representar as características da *wavelet* ou do filtro.

As operações de filtragem podem suceder-se tantas vezes quanto o tamanho da amostra permitir. Neste caso, diz-se que se está utilizando um banco de filtros. Por exemplo, a partir de duas filtrações sucessivas, pode-se obter a *aproximação da aproximação* (AA) e o *detalhe da aproximação* (DA); a *aproximação do detalhe* (AD) e o *detalhe do detalhe* (DD). São usualmente empregadas em inglês as rubricas *LL*, *HL*, *LH*, *HH*, aludindo-se às expressões *Low* e *High*, com o mesmo significado da frase anterior. Combinações mais complexas também podem ser construídas, como por exemplo, *LLL*, *LLH*, *LLLHH*, e assim, sucessivamente.

Na Figura 8 esta ideia é generalizada para três filtrações, onde se apresenta apenas o ramo da primeira *aproximação* (A).



**Figura 8 -** Esquema da decomposição *wavelet* de um sinal *S*. *A*: *aproximação*; *D*: *Detalhe*; *AA*: *Aproximação da Aproximação*; *DA*: *Detalhe da aproximação* e, assim, sucessivamente. FONTE: Adaptado de WEEKS (2007).

Por definição, a transformada *wavelet* contínua é uma função que convoluciona as translações e escalas da função a ser analisada (WEEKS, 2007, p.325):

$$W_f(a,b) = \int f(t)\psi(at+b)dt \quad (2.39)$$

Em que  $f(t)$  é a função a ser analisada no tempo  $t$ ,  $\psi$  é a *wavelet* mãe escolhida,  $a$  é o coeficiente de escala e  $b$  é o coeficiente de translação. O conjunto de dilatações e

translações da função  $\psi$  chama-se família de funções *wavelet*. Alternativamente (Id.):

$$W_f(s, u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sqrt{s} \psi(s(t-u)) dt \quad (2.40)$$

Neste caso, a família *wavelet* é  $\sqrt{s} \psi(s(t-u))$  transladada por  $u$  e escalonada (dilatada) por  $s$ . A forma 2.40 (Id.) pode ser reescrita como um produto interno por:

$$W_f(s, u) = \langle f(t), \sqrt{s} \psi(s(t-u)) \rangle \quad (2.41)$$

e é um produto calculado essencialmente com base em filtros (WEEKS, 2007, p.325). A (2.41) expressa uma convolução e estabelece a ligação da Teoria *wavelet* com a teoria de filtros apresentada no corpo desta proposição. Cabe destaque também a transição de todas as funções do domínio do tempo para o domínio do espaço, onde se encontram as aplicações deste trabalho.

A automação computacional da transformada *wavelet* é esquematizada como se cada um dos retângulos da Figura 8 fosse dois blocos de vetores dentro dos quais se armazena os coeficientes de cada uma das filtragens e os resultados das filtragens correspondentes. Com os coeficientes conhecidos, se a transformada *wavelet* existir, então o sinal original  $S$  pode ser recuperado a partir dos coeficientes e filtragens armazenados. A recuperação do sinal original depende da análise escolhida. Por exemplo, na (2.42), na (2.43) e na (2.44) apresentam-se diferentes modos de se recuperar o sinal  $S$  apresentado na Figura 4.

$$S = A + D \quad (2.42)$$

$$S = (DAA) + (AAA) + (DA) + (D) \quad (2.43)$$

$$S = (ADA) + (DDA) + (AA) + D \quad (2.44)$$

O raciocínio para a figura 8 pode ser repetido para o ramo direito ( $D$ ) - que não foi pormenorizado - gerando novas combinações, embora a mais geralmente encontrada seja a (2.42). A operação, tratada como soma, nas (2.42), (2.43) e (2.44)

visa indicar diferentes maneiras de se efetuar a síntese. A ideia de analisar e sintetizar o sinal a partir de diversos filtros sucessivos buscando-se descontinuidades ou variações bruscas de sinal (ou ainda, outras propriedades) é frequentemente referida nas bibliografias em Inglês como *multiresolution analysis* (MRA), traduzida literalmente para o português como *análise multirresolução*.

Embora o tratamento com base em filtros seja o mais prático, o desenvolvimento teórico das *wavelets* é sobremaneira extenso, não-trivial e baseia-se em muitas teorias e pormenores matemáticos (verifique-se, por exemplo, HOLSCHNEIDER, 2000; FREEDEN et Al., 2003; KELLER, 2004, pp. 24-130; FREEDEN & SCHNEIDER, 1998).

### 2.3.2. *Wavelets* em duas dimensões

Na reconstrução do sinal completo, haverá dois ou mais conjuntos de sinais: um conjunto representativo dos longos comprimentos de onda do geopotencial observado por alguma técnica, e outro(s) representativo(s) dos curtos comprimentos de onda do geopotencial observado(s) por outra(s) técnica(s). Estes conjuntos de dados são representados por imagens (ou matrizes) de tal modo que é mais útil operar com a transformada *wavelet* em duas dimensões do que com a expressão apresentada na (2.41). Os resultados são tratados exatamente como na transformada em uma única dimensão, ou seja, após a transformada de um conjunto de dados serão conhecidas as suas matrizes de aproximação e detalhe. Como haverão dois conjuntos de dados, deve ser operada uma fusão de tal modo a aproveitar a melhor característica de cada conjunto.

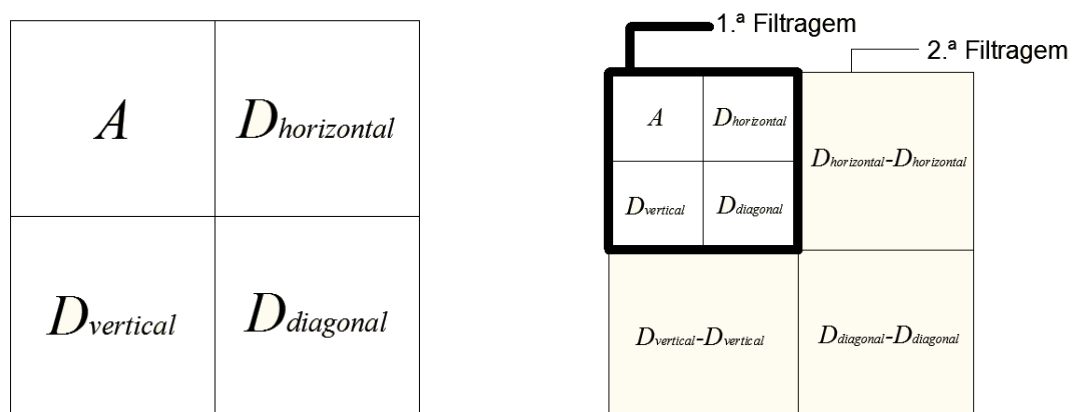
Quando se dispõe de uma matriz (ou uma imagem)  $\mathbf{M}$ , a transformada wavelet de Haar em duas dimensões desta matriz é dada por (Bénéteau e Van Fleet, 2011):

$$\mathbf{B} = \mathbf{W}_f \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}_f^T \quad (2.45)$$

E a (2.45) pode ser generalizada para quaisquer outros conjuntos de transformadas *wavelet* que não a *wavelet* de Haar, dependendo exclusivamente de como se geram os elementos da matriz  $\mathbf{W}_f$ . Os coeficientes das transformadas são

organizados na matriz  $W_f$  tal que as matrizes de aproximação e detalhe resultam organizadas, tal como na Figura 9. Detalhes são apresentados no trabalho já referido de BÉNÉTEAU and VAN FLEET (2011).

Assim como na análise unidimensional, a transformada *wavelet* 2d pode ser aplicada mais de uma vez sobre o mesmo conjunto de dados. A cada vez que a transformada é aplicada, diz-se que tem um conjunto de resultados em um nível. Numa visão ligeiramente modificada pelo autor, por exemplo, têm-se uma análise em um (à esquerda) e dois (direita) níveis na Figura 9:



**Figura 9** - Decomposição *wavelet bidimensional* em um (esquerda) e dois (direita) níveis.  
 FONTE: Adaptado de MATHWORKS (2011)

Nesta figura, assim como nas anteriores,  $A$  são aproximações e  $D$  são os detalhes; Agora, os dados filtrados são armazenados na forma de matrizes. Embora as matrizes de *aproximação*  $A$  e *Detalhe vertical-Detalhe vertical*  $D_{vertical}-D_{vertical}$  da Figura 9 sejam dimensionalmente diferentes, elas representam os mesmos limites espaciais (podem ser, por exemplo, limites geográficos) e resoluções diferentes. A cada filtragem há uma expectativa de perda da metade da sua resolução devido ao *downsampling*. Tal tipo de representação é aquela geralmente encontrada no processamento *wavelet* com imagens. Merece atenção o fato de que neste tipo de representação está apenas um dos ramos da filtragem. Escolhe-se sempre, portanto, qual dos ramos da filtragem será apresentado. No entanto, para aplicações em teoria do potencial em geral, uma escolha adequada depende das características que se deseja manter (e.g. o referencial).

O modo como são representadas as *wavelets* em duas dimensões permite compatibilizar duas matrizes de mesma ordem, mas de magnitudes diferentes via a



aplicação de algum critério de escolha entre os *pixels* de mesma posição das matrizes ou uma substituição conveniente. A guisa de exemplo, para se obter uma sobreposição de dados, a média pixel a pixel de valores da transformada *wavelet* poderia ser um critério razoável para obtenção do valor esperado pixel a pixel para a fusão de duas matrizes de dados.

Embora a análise *wavelet* tenha sido tratada nesta seção e na anterior, é importante lembrar que se tratam apenas de capítulos de fundamentação que devem servir como norteadores para a compreensão da metodologia empregada. A compreensão absoluta da análise e síntese por *wavelets* requer necessariamente uma leitura pormenorizada das referências apresentadas e possivelmente outras adicionais que não estão no contexto deste trabalho.

### 2.3.3. Colocação por mínimos quadrados - CMQ

A colocação por mínimos quadrados (CMQ) está inserida neste trabalho, devido à tradição na parametrização, estimação de resíduos e principalmente como apoio para comparação com a metodologia proposta.

A colocação por mínimos quadrados é um processo que envolve o ajuste de um funcional, extração da parte sistemática, eliminação do ruído e predição de novas quantidades (MORITZ, 1980). A parte associada com o ajuste de um funcional  $\mathbf{x}$  é dada por Moritz (1972):

$$\mathbf{x} = \mathbf{AX} + \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x} \quad (2.47)$$

Em que  $\mathbf{x}$  é o vetor de observações,  $\mathbf{AX}$  é a parte sistemática introduzida em geral pelo modelo geométrico utilizado,  $\mathbf{s}$  é o sinal e  $\mathbf{n}$  é o ruído;  $\mathbf{C}$  é a Matriz Covariância. Na etapa de predição utiliza-se o funcional ajustado  $\mathbf{X}$  obtido da (2.47) para predizer os elementos contidos nas matrizes Covariância  $\mathbf{C}$  e Covariância Cruzada dos pontos a predizer  $\mathbf{C}_{SX}$ , que gerará o sinal a ser predito, dado por (Ibidem):

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}_{SX} \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{AX}) \quad (2.48)$$

O primeiro passo necessário à colocação é a determinação de uma curva, chamada Função Covariância Empírica, ou simplesmente covariância empírica, descrita por Heiskanen & Moritz (1967) e obtida unicamente a partir das amostras observadas. A covariância empírica pode ser construída a partir de funcionais do mesmo tipo (e.g. anomalias da gravidade) ou funcionais de tipos diferentes (e.g. anomalias da gravidade e alturas geoidais, alturas geoidais e distúrbios da gravidade, etc.) e o resultado, em geral, é uma curva de pontos discretos cujas abscissas são igualmente espaçadas.

A covariância empírica é, portanto, uma curva que compõe os dados que serão ajustados pela (2.47) e, é implícito que já se conhece a função a ser modelada. Em geral, este conhecimento é confirmado ou não mediante um teste de aderência da função ajustada aos dados conhecidos. No entanto, referida modelagem está vinculada à experiência do usuário com o tipo de informação à qual se deseja efetivar a predição e/ou filtragem. Assim, a proposição de função inicial quase nunca se dá num primeiro momento, a menos que se utilizem modelos complexos que atendam a diferentes situações. Nas Ciências Geodésicas funções de baixo grau compostas com funcionais gaussianos ou exponenciais são encontrados em muitas bibliografias que tratam da CMQ aplicada à regiões pequenas e, por outro lado, funções baseadas em polinômios de Legendre são geralmente empregadas para regiões extensas ou para todo o globo terrestre.

Dizer que uma função é capaz de modelar a covariância empírica e utilizar esta função para gerar os elementos da matriz covariância e da matriz covariância cruzada significa dizer que os dados dependem unicamente da distribuição de correlação que modela a aderência entre eles. Todavia, nem sempre o aspecto associado ao semelhante mais próximo (ou melhor correlato) é o aspecto mais adequado nos casos de predição. Também deve ser considerado que a covariância empírica na sua expressão clássica só pode ser considerada duas a duas variáveis, o que não é satisfatório quando um fenômeno depende de mais de duas.

Adicionalmente, ao construírem-se as matrizes covariância e covariância cruzada, determinadas funções (e.g. polinomiais) podem gerar algumas linhas como sendo combinações lineares de outras, o que dificulta sobremaneira a sua inversão. A pseudoinversa, ou inversa generalizada de Moore-Penrose tem sido utilizada para dirimir este problema em alguns casos com sucesso (HEISKANEN E MORITZ, 1967). Nestes casos, uma filtragem  $3\sigma$  dos dados preditos é aplicada como tentativa

de excluir os *outliers*. Assim, a pseudoinversa tem se configurado como uma alternativa para os problemas de inversão quando se deseja trabalhar com regiões relativamente pequenas (e.g. da ordem dos 50 km) ou quando combinações lineares das funções surgem.

A CMQ não é o escopo principal deste trabalho e para sua melhor compreensão recomenda-se as obras de Helmut Moritz e Carl Christian Tshherning associados ao tema. Uma lista de 290 publicações do segundo autor está disponibilizada de forma gratuita em < <http://cct.gfy.ku.dk/> > (Acesso em 13/03/2013).

Muito particularmente, no caso da CMQ e das Redes Neurais Artificiais (RNAs, apresentadas na próxima seção) um argumento que geralmente põe as técnicas à prova está relacionado com a escolha ou da função a ser ajustada, ou da função de transferência (e/ou número de camadas de uma RNA): não há um critério exato para a escolha destas funções na CMQ ou número de camadas nas RNA. Com relação às *wavelets*, não há também um critério de escolha para função *wavelet* a ser utilizada ou escolha da função mãe (ou família de *wavelets*). Este tipo de dúvida é um problema clássico de modelagem e ocorre em qualquer outro campo de aplicação envolvendo as ciências naturais. No caso mais clássico, pode-se recorrer a qualquer função para ajustar-se a função covariância necessária à predição dos dados da CMQ, correlação espacial na krigagem, dimensão do filtro na filtragem gaussiana para o tratamento de distribuições espaço-temporal de dados, e de forma geral ocorrendo em qualquer outra técnica/metodologia utilizada.

Deste modo, o modelo a ser implementado em alguma metodologia depende, em todos os casos, da habilidade e experiência daquele que executa a modelagem e, portanto, qualquer técnica ou metodologia passará por etapas onde a escolha do modelo não poderá ser feita de modo determinístico, mas sim escolhida qualitativamente com base na experiência daquele que modela e validada, por exemplo, reservando-se pontos de controle.

#### 2.3.4. Redes neurais artificiais

Tanto as redes neurais artificiais (RNAs) como a CMQ servem para comparação com a metodologia de teste.

As redes neurais buscam encontrar funções que separam classes de variáveis a partir do conhecimento de conjuntos de vetores de entrada e de saída (NEGNEVITSKY, 2002). No Brasil, a predição de quantidades associadas ao geopotencial utilizando redes neurais artificiais (RNAs) tem como marco o trabalho de TIERRA CRIOLLO (2005) em que as quantidades base eram anomalias da gravidade.

As redes neurais podem ser compreendidas como uma série de operadores algébricos não lineares que, quando somados a uma quantidade aleatória chamada *bias* constituem uma camada. Se  $n$  funções de transferência são utilizadas numa camada, então diz-se que esta camada tem  $n$  neurônios. Podem ser utilizadas tantas camadas quanto julguem-se necessárias para modelar o resultado. À etapa de adequar os conjuntos de vetores de entrada aos de saída usualmente é chamada de *aprendizado* ou *treinamento*. O aprendizado pode acontecer utilizando-se diferentes metodologias e diz-se que uma Rede Neural Artificial aprendeu algo quando uma determinada meta associada ou a um erro ou a um desvio padrão é atingida.

Estudos realizados pelo Laboratório de Referenciais Geodésicos e Altimetria por Satélites (LARAS) da Universidade Federal do Paraná apontam RNAs com arquitetura baseada em funções de base radial e funções tangente-senoidais, compostas por poucos neurônios como sendo capazes de prever diversas quantidades vinculadas ao geopotencial, entre elas anomalias Bouguer e alturas geoidais, com RMS comparáveis diretamente a técnicas como a krigagem (e.g. em torno de 3mGal, no caso de anomalias da gravidade).

A grande vantagem das RNAs sobre a CMQ é a utilização de diversos funcionais ao mesmo tempo, quando na CMQ esta possibilidade, em geral, ocorre somente duas a duas variáveis. Todavia, assim como já explicitado na seção anterior, diferentes funcionais podem ser aplicados à CMQ, diferentes arquiteturas podem ser utilizadas nas RNAs e a única maneira de evidenciar o funcionamento da técnica é mediante o teste de eficiência em pontos de controle. Um modo bastante eficiente de testar diferentes arquiteturas de redes neurais artificiais é via uma rotina escrita por Tierra Criollo (2003) para Matlab®, e que pode ser obtida via o contato pessoal com o autor. Referências sobre construção, representação, projeto, aplicações e treinamento de RNAs podem ser conseguidas, por exemplo, em Jain e Fanelli (2000).

### 2.3.5. Validação de dados *Cross-Validation*

A técnica *cross-validation* ou validação cruzada é uma técnica de verificação de desempenho. Pode ser empregada para testar a qualidade de modelos utilizados em algum tipo de predição.

De um modo geral, a validação cruzada pode ser caracterizada como um conjunto de procedimentos onde se observam as seguintes etapas: a) separação de um conjunto de dados original *ORI* e um conjunto de dados preditos *PRE*; b) extração de uma única amostra de *PRE* e inserção desta amostra na mesma posição (ou geospacial, ou de correlação) no conjunto *ORI*, gerando um novo conjunto miscigenado chamado *PREORI*; c) Avaliação do efeito desta substituição com alguma técnica como, por exemplo, o cálculo do erro médio quadrático sobre todo o conjunto de dados *PREORI* relativamente ao conjunto *ORI* ou, ainda: ajuste de uma função *F* aos dados *ORI* e da mesma função *F* aos dados *PREORI* bem como a verificação da variação dos coeficientes ajustados; d) extração de outra amostra de *PRE*, repetindo as etapas a), b) e c). Então se executa o mesmo procedimento até que se esgotem todas as amostras preditas.

Quando as etapas apresentadas no parágrafo acima seguem outros critérios para a geração de *PREORI*, têm-se os diferentes tipos de validação cruzada (e.g. o *k-fold cross-validation*). Detalhes sobre a teoria, desenvolvimento e programação de métodos de validação cruzada são encontrados facilmente na internet (e.g. Mathworks, 2013). Particularmente, cita-se aqui um exemplo de validação cruzada que foi originalmente concebido para dados temporais e foi readequado para matrizes. Este exemplo foi extraído de Trauth (2007, p.77).

### 2.3.6. Automação do processamento de dados geodésicos nesta pesquisa

Mesmo para as soluções locais, o processamento de dados nas ciências geodésicas implica organizar, calcular e armazenar um grande volume de informações. Todas estas operações devem ser realizadas sempre que possível em associação com uma base cartográfica e vislumbrando-se a capacidade de digitalização de informações de forma pontual.

Nesta tese, a maioria dos códigos (muitos deles encontram-se apresentados nos apêndices) foram concebidos no ambiente Matlab® e, para tanto, adquiriu-se uma licença do referido programa. O ambiente permite a realização de todas as operações descritas no parágrafo anterior associadas com uma documentação bastante presente na internet, além do suporte ao usuário. Transformadas *wavelet* ou podem ser programadas segundo a teoria apresentada nas seções anteriores, ou podem ser utilizadas diretamente via a *toolbox* – um conjunto de aplicativos – que pode ser adquirida separadamente. Também existem *toolboxes* para a construção de mapas, estatística (aí encontram-se inseridas ferramentas muito interessantes de ajuste por Método dos Mínimos Quadrados), além de fotogrametria e sensoriamento remoto, bem como uma série de sistemas voltados à simulação, eletrônica, vídeo, etc. Todas estas alternativas podem também ser desenvolvidas pelo usuário, caso este opte pela programação no sistema nativo. Este foi o caso, por exemplo, das integrações numéricas descritas na seção 2.2.2.

Outro obstáculo importante a ser citado é o da limitação e resolução dos dados. Muitas vezes necessitou-se compatibilizar, recortar, ou reamostrar informações. Para estes pormenores, utilizou-se o software Surfer®, que permite realizar estas operações, o qual também foi adquirido para esta tese.

Todos os resultados apresentados aqui, portanto, são produtos gerados ou pelo Matlab® ou pelo Surfer®.

### 3. REGIÕES DE ESTUDO E FONTES DE DADOS DISPONÍVEIS

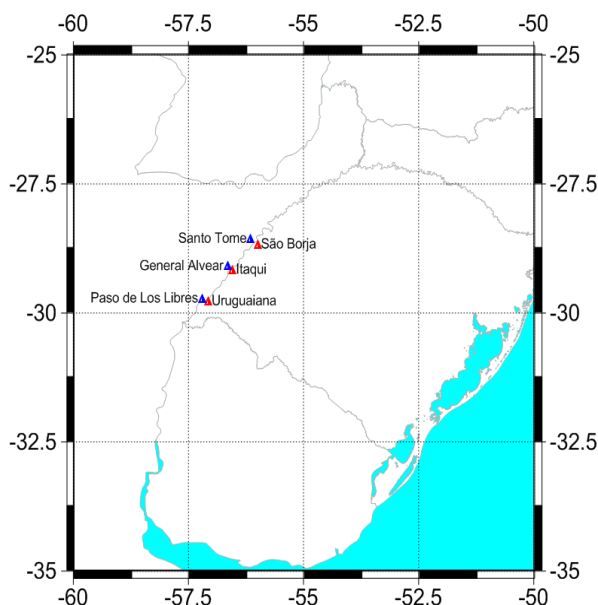
#### 3.1. Região de Estudos A

Um conjunto de instituições<sup>3</sup> iniciou em 2008 uma sequência de campanhas, na fronteira sul do Brasil com a Argentina, com o objetivo de compreender os fenômenos associados ao estabelecimento de diferentes data verticais locais e seu vínculo com um Sistema Global de Altitudes. Estas campanhas culminaram com a materialização e ocupação de alguns pontos que se encontram na fronteira do Brasil com a Argentina (aproximadamente entre os limites  $-29^{\circ} < \varphi < -27^{\circ}$ ,  $-57^{\circ} 30' < \lambda < -54^{\circ} 30'$ ) e que, após associação com bancos de dados de informações do IGN e do IBGE, constituíram dois circuitos de desníveis geopotenciais na região. De uma maneira elementar, estes circuitos passam por três cidades na referida fronteira: São Borja, Itaqui e Uruguaiana. Estas cidades estão representadas na Figura 10 e os circuitos representam a Região de Estudos A. Os experimentos realizados nesta região estão vinculados a dois resultados: a) a determinação do afastamento entre os data verticais do Brasil e da Argentina e b) a verificação do efeito das observações da gravidade aos desníveis brutos para o fechamento dos circuitos geopotenciais.

À época, esta rede mencionada tinha consistência relativa para a validação de modelos físicos, mas não ofereciam desempenho similar necessário à realização de uma rede vertical local comparável às redes nacionais do Brasil e da Argentina. Conjuntos de observações adicionais permitiram identificar erros grosseiros e sistemáticos que afetaram as observações originais gerando novos conjuntos de dados. Embora sendo alguns desníveis úteis à conexão das redes verticais brasileira e argentina, as altitudes utilizadas na época não estavam associadas ao Ajustamento Altimétrico Simultâneo da RABF concluído em 15/06/2011 pelo IBGE, uma vez que a última campanha fora realizada pelo menos um ano antes. A documentação que descreve os principais pontos negativos e positivos desta rede está apresentada em De FREITAS et Al. (2010).

---

<sup>3</sup> A citar: O Laboratório de Referenciais Geodésicos e Altimetria por Satélites (LARAS) da UFPR, o Instituto de Geofísica e Astronomia da Universidad Nacional de La Plata (UNLP), o Instituto Geográfico Militar (IGM) da Argentina (agora Instituto Geográfico Nacional - IGN) e o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).



**Figura 10** - Região de estudos A.

FONTE: O Autor.

Alguns aspectos que estimulam o estudo contínuo desta região e que devem ser destacados são:

- a) Tratando-se de região de fronteira, não é possível obter anomalias referidas a um único *datum* vertical. Soluções fronteiriças que não considerem estes aspectos sofrerão influência de mais de um *datum* vertical;
- b) Indícios baseados em observação gravimétrica apontam que a região é afetada pelo regime hidrológico da bacia do Rio Uruguai, considerado o efeito sazonal e, principalmente o efeito antrópico produzido pela cultura do arroz, fortemente presente na região. Embora fator evidente na área de estudos, o aspecto temporal, em função do regime hidrológico diferenciado na região, não é tratado nesta Tese;
- c) observações da UFPR e da UNLP concluíram que não foi possível explicar toda a variabilidade espacial encontrada para o geopotencial em pontos específicos daquela região, principalmente na região de São Borja.
- d) Em 2011 havia a expectativa de monitoramento da região via um referencial externo. Até então, buscava-se, em conjunto com o IBGE, a instalação e operação de uma estação da Rede Brasileira de



Monitoramento Contínuo (RBMC), que poderia agregar informações com maior consistência geométrica na região. Tal estação não foi instalada e não houveram observações adicionais na localidade;

- e) Existem várias transições geológicas formadoras da estrutura da crosta terrestre naquela região;
- f) O já referido conjunto de observações interinstitucionais da UFPR, UNLP, IBGE e IGN (Argentina) permite efetivar-se diversas análises no contexto deste trabalho.

### 3.2. Região de Estudos B

Manter a *região de estudos A* como única área de testes implica restringir os resultados a um único espaço cujas condições apresentam variação suave do relevo, cobertura gravimétrica razoável e limitadas extensões geográficas. Nas seções seguintes, por exemplo, é possível perceber que a região de estudos A não apresenta algumas das características desejáveis ao trabalho que se propõe, como por exemplo, a já referida variação do relevo. Então, do ponto de vista científico, é importante que se generalizem os resultados para regiões com diferentes características morfo-estruturais e diferentes distribuições de dados. Neste sentido, apresenta-se a Regiões de Estudos B (grifada com coloração diferente na Figura 11). A região B destaca-se devido ao vínculo político estabelecido com o Uruguai e a Argentina, países que mantêm data verticais não coincidentes com o Datum Vertical Brasileiro de Imbituba (DVB-I), além de corresponder exatamente à generalização da Região de Estudos A.



**Figura 11** - Regiões de Estudo B (Grifada com coloração diferente).  
FONTE: O Autor.

Ao trabalhar com as duas diferentes regiões de estudos espera-se um panorama associado aos aspectos locais, onde serão distinguíveis apenas os elementos associados aos circuitos geopotenciais e às diferenças de nível entre as duas redes nacionais envolvidas, para o caso da região de estudos A. Isto significa que serão evidenciadas características associadas às linhas de nivelamento envolvidas. Para a região B, espera-se que se evidenciem aspectos mais vinculados à superfície de nível referida à Imbituba, uma vez que há um número maior de informações gravitacionais está, de um ponto de vista global, dispersas sobre a referida localidade.

### **3.3. Missão GRACE, Missão GOCE e Modelos Gravimétricos Associados**

A missão GRACE (*Gravity Recovery and Climate Experiment*) é composta de dois satélites em *tandem* e foi lançada em março de 2002 com o objetivo de fazer observações detalhadas do campo da gravidade da Terra e está em atividade há mais de 10 anos, embora sua vida útil fosse estimada para cinco anos. Os dois satélites orbitam aproximadamente há uma distância de 220 km afastados um do outro, numa órbita polar, 500 km *acima* da Terra e resultados de suas observações permitem estudar mudanças nas variações de correntes oceânicas, fluxos de massa nos continentes, alterações glaciológicas, transferências de massa dentro do Sistema Terra, além de gerar melhorias em modelos da atmosfera terrestre.

Os dados GRACE estão divididos em três níveis: Os dados brutos, chamados de *level 1A*, não estão disponíveis ao público. Os dados chamados de *level 1B* contém medidas entre satélites, acelerações não gravitacionais de cada satélite, entre outros; estes dados produzem modelos gravitacionais mensais na forma de coeficientes de harmônicos esféricos. Quando muitos meses de dados são combinados de forma a produzir um modelo estático, estes dados são chamados de *level 2* e estão disponíveis ao público (e.g. o Modelo do Geopotencial GGM02). Os dados que contém contribuições adicionais aos dados *level 2* são chamados de *level 3* e também encontram-se acessíveis. Os parágrafos acima constituem uma síntese do que se encontra disponível em <<http://www.csr.utexas.edu/grace/>> (Acesso em 03/05/2011).

A missão GOCE (*Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer*) teve o lançamento de seu satélite em 17 de Março de 2009 e é a primeira de uma série de missões voltadas para a compreensão das variáveis do Sistema Terra (ESA GOCE, <[http://www.esa.int/SPECIALS/GOCE/SEMOM2VHJCF\\_0.html](http://www.esa.int/SPECIALS/GOCE/SEMOM2VHJCF_0.html)>, Acesso em 18/05/2011). A espaçonave é constituída de um sistema de gradiômetros, receptores GPS e sistema de controle de atitude. Os dados brutos são transmitidos a um centro de processamento na Itália, onde os dados são calibrados e sofrem um processamento vinculado a sistemas de referência, posição, velocidade, entre outros. Após este processamento, os dados são chamados de *level 1b*. A seguir estes dados são passados para Universidades e Centros de Geodésia que os transformam em dados *level 2*, os quais, assim como no caso do GRACE estão disponíveis à comunidade em geral na forma de representação espectral. (ESA earthnet online <<http://earth.esa.int/object/index.cfm?fobjectid=5706>>, Acesso em 18/05/2011).

Os MGGs serão utilizados nesta tese com o principal objetivo de complementar as informações locais. Em geral, os dados GOCE e GRACE são compilados conjuntamente com outros dados (e.g. da missão LAGEOS) para a geração de informações ligadas aos longos comprimentos de onda.

### **3.4. O MGG Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)**

O EGM2008 é *um modelo de harmônicos esféricos do Potencial Gravitacional da Terra desenvolvido com base em uma combinação por mínimos quadrados do modelo gravitacional ITG-GRACE03S e sua matriz variância-covariância associada com as informações gravitacionais obtidas de um conjunto global de anomalias da gravidade free-air médias para quadrículas definidas em uma grade equiangular de cinco minutos de arco de resolução* (PAVLIS et Al., 2012). O EGM2008 truncado nos graus mais baixos (e.g. menores que o grau  $n=360$ ) tem sido, até a apresentação dos resultados da Missão GOCE, a principal fonte de longos comprimentos de onda para a geração de modelos do geopotencial locais. Entre estas soluções é possível apresentar, por exemplo, a solução brasileira oferecida pela Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), conhecida como MAPGEO2010 (MATOS et Al., 2012). De acordo com Melo & De

Freitas (2012) é possível encontrar discrepâncias do MAPGEO2010 relativamente a valores de GPS/RN de mais de 1m na região norte e nordeste do país. Convém também lembrar que informações até o grau 150 utilizadas na elaboração do MAPGEO2010 advém do EGM2008, conforme Matos et Al., 2012. Então, existem dúvidas quanto à origem dos erros assinalados na região, uma vez que o EGM2008 e modelos atuais derivados da gravimetria por satélites não apresentam discrepâncias de tal magnitude. Dois segmentos da RAFB na região da foz do Rio Amazonas, por exemplo, apresentam discrepâncias 1,32m a 1,43m (MONTECINO E DE FREITAS, 2012). Assim, o entendimento das discrepâncias, ou dos modelos geoidais no território brasileiro, ou outros locais, passa inevitavelmente pelo entendimento dos modelos geradores dos longos comprimentos, médios e curtos comprimentos de onda do geopotencial bem como da base geodésica disponível e dos respectivos referenciais associados para a região analisada.

O EGM2008 é disponibilizado por meio de um conjunto de harmônicos esféricos via página na internet do NGA (*National Geospatial-Intelligence Agency* - <<http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/>>, Acesso em 25/03/2013) ou Banco de dados da Associação Internacional de Geodésia mediante o Centro Internacional para Modelos Globais da Terra (ICGEM - *International Centre for Global Earth Models* - <<http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>>, Acesso em 25/03/2013), além de ser encontrado em outras fontes. Na internet, o ICGEM oferece um serviço de cálculo onde estão programadas diferentes quantidades como anomalias da gravidade, distúrbios da gravidade, derivadas segundas do geopotencial, etc., calculadas em função dos referidos coeficientes do geopotencial. Em geral, portanto, a principal aplicabilidade dos MGGs tais como o EGM2008 é a obtenção dos longos comprimentos de onda do geopotencial. Estes são separados, como já mencionado, com base em artifícios matemáticos como subtração de grades ou truncando o desenvolvimento dos MGGs em um determinado grau e ordem.

### 3.5. Modelos Digitais de Altitudes

Os Modelos Digitais de Altitudes são arquivos organizados, geralmente na forma de matrizes ou listas, associados a sistemas geodésicos de referência onde

cada elemento da matriz ou lista é a altitude média de uma quadrícula de tamanho igual à resolução do modelo.

Nesta seção, cabe a discussão a respeito do seu título. Sabe-se que as denominações modelos digitais de elevação, superfície e terreno têm significados consagrados, principalmente entre usuários da Fotogrametria e do Sensoriamento Remoto. Todavia, neste trabalho preferiu-se usar a expressão Modelo Digital de Altitude (MDA) com vistas a evitar confusão com as demais expressões, visto que a preocupação da Geodésia neste contexto referir-se exclusivamente à altitude do ponto na Superfície Física do Terreno, livre de quaisquer tipos de cobertura.

Aqui, é oportuno trabalhar os aspectos relacionados às superfícies de referência para a contagem das altitudes utilizadas nos Modelos Digitais de Altitude. Embora se disponham de diversos modelos digitais de altitude, nem todos estão associados à mesma superfície de referência, ou seja, a altitude igual a zero nem sempre corresponde à mesma superfície de referência geométrica ou equipotencial. Assim, embora uma compatibilização em termos de referência seja sempre necessária (e.g., a missão SRTM está referenciada ao MGG EGM96, os modelos DTM2002 e DTM2006 estão implícitos no EGM2008, diferentemente das altitudes brasileiras referidas a uma média de observações realizadas no marégrafo de Imbituba), esta acaba sendo ignorada em razão das magnitudes das quantidades envolvidas. No entanto, deve-se considerar que os MDA apresentam altitudes médias para quadrículas, conceito este muito mais vinculado à ideia de pixel do que a de se pensar em um erro radial, por exemplo, no ponto correspondente ao centro da quadrícula. Observe-se que no contexto das análises efetivadas neste trabalho, interessa o efeito integrado do pixel e não um erro sintético considerado no centro da quadrícula. Apesar da variabilidade lateral da topografia ser elevada, os efeitos sobre o geoide são atenuados por originarem-se da integração dos efeitos das massas e não de valores pontuais.

Neste trabalho, foram utilizados os modelos digitais de altitudes derivados da missão SRTM (Farr et Al., 20??), para o qual é possível nominar erros de até 10 m para a América do Sul (Ibid.), e do modelo ETOPO1, disponibilizado pelo ICGEM. No entanto, estes erros, conforme assinalado, são avaliações pontuais que não se coadunam com a ideia de topografia média do pixel, a qual é a fonte real de efeitos gravitacionais relevantes para as determinações RTM e TC. Assim, uma análise da resolução do MDA no contexto deste trabalho só pode ser efetivada com base nos

resultados obtidos sobre pontos de teste de alturas geoidais ou quasegeoidais que reflitam o sinal completo de um elemento de massa associado ao pixel.

Em específico neste trabalho, os modelos digitais de altitude se prestam à determinação dos curtos comprimentos de onda do geopotencial, seja no cálculo de correções do terreno, seja na determinação do efeito RTM (técnica cuja referência tradicional é HIRT et Al., 2010), ou ainda no cálculo do efeito RTM sobre anomalias de altitude provenientes de um MGG (Ibid.).

#### 4. METODOLOGIA

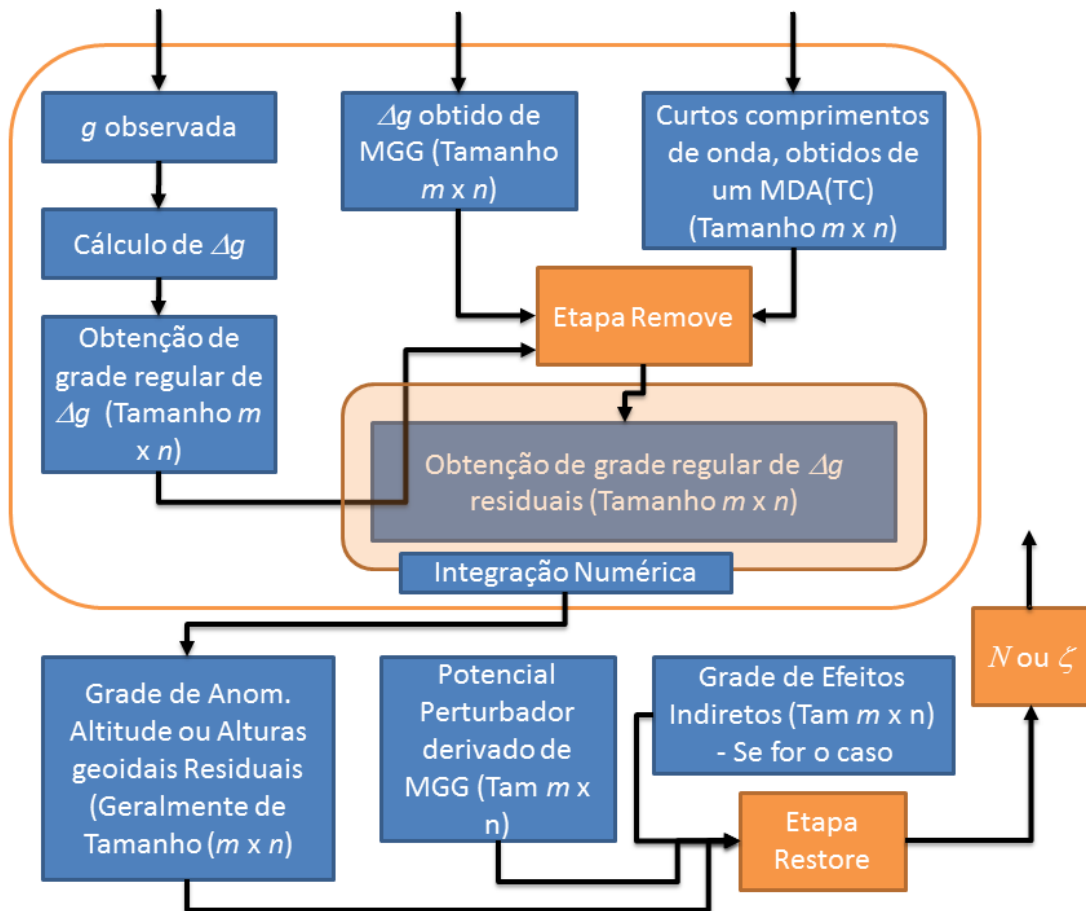
Este trabalho está centrado na modelagem do campo da gravidade local e em uma modificação da etapa *restore* da metodologia *remove-restore*. Será possível perceber na sequência que ambos os resultados envolvem exatamente a mesma concepção metodológica.

Conforme já descrito, a etapa *remove* consiste numa subtração de matrizes obtidas a partir da divisão arbitrária do espectro do geopotencial em curtos, médios e longos comprimentos de onda. A etapa *restore* utiliza os mesmos parâmetros considerados na etapa *remove* para truncar os modelos nos seus respectivos graus e ordens para que não exista nenhum vazio espectral. Em princípio, quaisquer escolha arbitrária não terá efeitos negativos se as escolhas da etapa *remove* forem as mesmas da etapa *restore*.

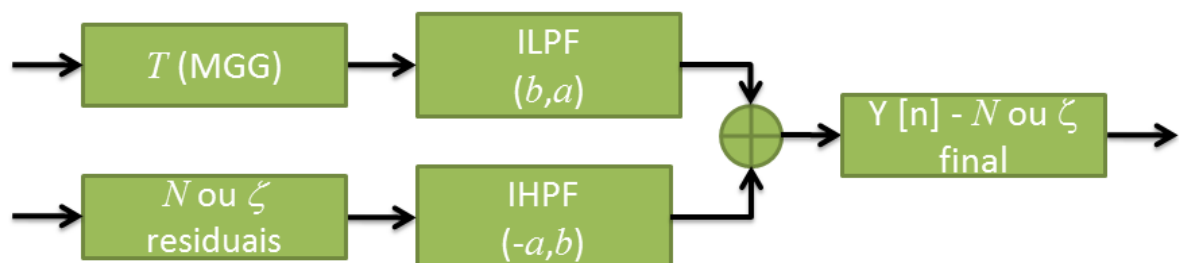
Todavia, a simples soma, elemento a elemento (ou grade a grade), que ocorre na etapa *restore* não garante a continuidade espectral do sinal considerado. Nesse sentido, propõe-se a seguinte solução recursiva: *De modo geral, é possível tomar como verdade o pressuposto de que um sinal, com transformadas wavelet, pode ser analisado de tal forma que ficam claramente separados os curtos e longos comprimentos de onda e, aquele sinal **pode ser reconstituído** utilizando a mesma técnica.* Assim, havendo as constituintes do sinal analisado (separado), a sua síntese seria possível mediante uma adequada escolha de matrizes. Os critérios desta escolha estão vinculados com as ordens das matrizes e podem ser verificados nos resultados, mais adiante.

Em complemento a este raciocínio, tem-se na Figura 12 um esquema da metodologia *remove-restore* e, na Figura 13, como poderia ser efetivada a síntese de longos e curtos comprimentos de onda para, por exemplo, alturas geoidais (ou anomalias de altitude). Na Figura 13, os efeitos residuais são introduzidos como dados originários de um processo de filtragem *passa-alta* e os longos comprimentos de onda como se fossem dados procedentes de um processo de filtragem *passa baixa*. Na figura 13, este processo de filtragem apresenta os dados referentes aos longos comprimentos de onda como sendo derivados do potencial perturbador  $T$

advindo de um MGG. Os coeficientes são escolhidos para as *wavelets* de Haar como o caso mais elementar.



**Figura 12** - Esquema da Técnica *Remove-Restore*.  
FONTE: O Autor.



**Figura 13** - Etapa restore representada num esquema de síntese por *wavelets* de Haar. Representação dos coeficientes em um diagrama de filtros.  $a = b = 1/\sqrt{2}$ .  
FONTE: Adaptado de Weeks (2007).



Deste modo, a etapa *restore* pode ser implementada não mais como uma soma simples, mas como a conjugação, em termos da sua decomposição, de longos e curtos comprimentos de onda a partir de coeficientes de filtros. A inserção dos médios comprimentos de onda (por exemplo) poderia ser feita em mais uma etapa similar, ou seja, combinando-se primeiramente os curtos e médios comprimentos de onda e depois, combinando-se este resultado com os longos comprimentos de onda.

O procedimento apresentado nos três parágrafos anteriores pode ser também generalizado para outras situações. Por exemplo, quando se deseja incorporar o efeito indireto, necessário no caso onde o cálculo do geoide é realizado segundo a visão clássica da aplicação da integral de Pizzetti-Stokes, conforme a seção 2.2.1. Seguindo o mesmo raciocínio, agora a situação da obtenção ou interpolação da gravidade considerando fenômenos anisotrópicos não modeláveis por técnicas usuais é apresentada.

Comparativamente às anomalias de altitude, a gravidade também pode ser compreendida de tal modo que o efeito total possa ser dividido numa componente sistemática (pode ser considerada, por exemplo, a gravidade normal) e numa componente de sinal (por exemplo, anomalias da gravidade). Desde que a análise *wavelet* seja a referência, qualquer componente sistemática pode ser tratada como uma matriz de *aproximação* e quaisquer ruídos (ou curtos comprimentos de onda) podem ser expressos por matrizes de *detalhe*. Assim, similarmente ao exemplo apresentado com anomalias de altitude, seria possível mesclar, conforme pormenores apresentados na seção 4.2, a matriz de *aproximações* do campo da gravidade normal com a matriz de *detalhes*, por exemplo, de anomalias da gravidade. Neste trabalho, poderá ser verificado, ao longo das próximas seções, que se utilizou os longos comprimentos de onda como *aproximação* e os curtos comprimentos de onda como *detalhe* ao efetuar-se a predição gravimétrica. Portanto, a referência deve ser o melhor de cada base de dados envolvida. Em vista da necessidade em atender-se aos objetivos iniciais deste trabalho, convém, apresentar claramente as implicações diretas deste raciocínio:

- a) Ao separar-se a matriz de *aproximações* do campo da gravidade normal ou de um modelo truncado num grau baixo (aqui se considerou 360) , conserva-se a faixa do espectro referente aos longos comprimentos de onda do geopotencial;

- b) Ao separar-se a matriz de *detalhes* de anomalia da gravidade, supõe-se conservados os curtos comprimentos de onda do geopotencial;
- c) Quando se faz a síntese *wavelet* a partir das matrizes de aproximação e detalhe mencionadas nas seções a) e b) espera-se que se mantenham conservados os longos e curtos comprimentos de onda do Geopotencial. Assim, a informação espectral deve ser conservada naquelas faixas do espectro onde elas são mais consistentes.

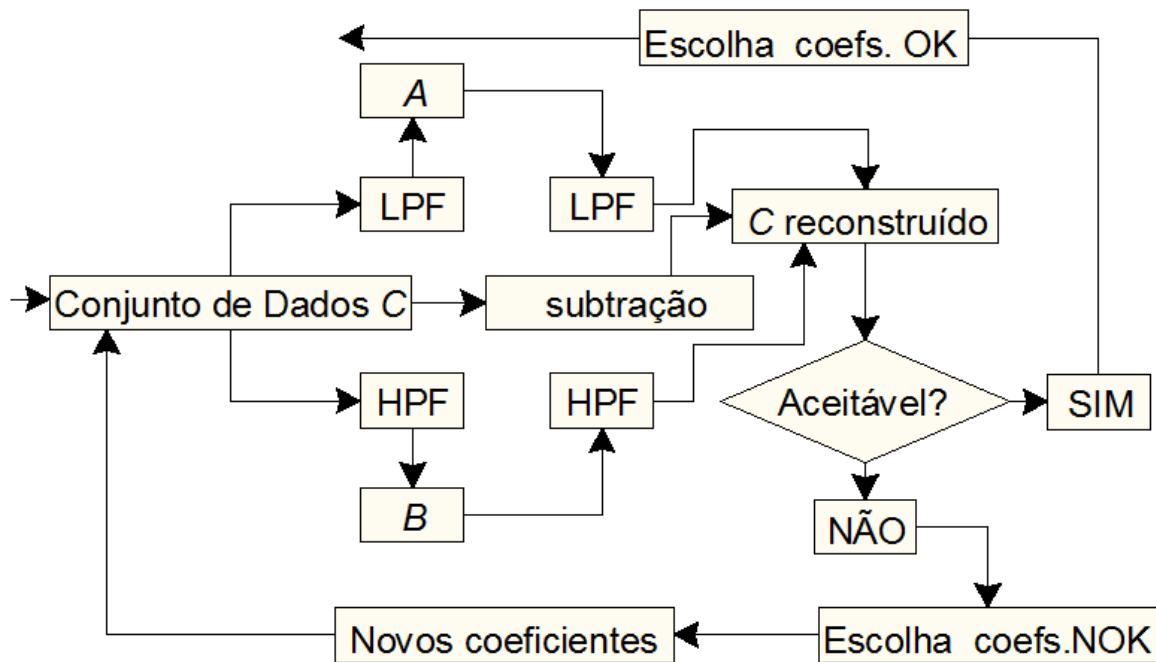
Deve ser recordado que a CMQ estabelece raciocínio idêntico ao separar o ruído da componente sistemática. Todavia, enquanto a CMQ toma por referência a magnitude do variograma relativamente a uma distância de correlação até o ponto de cálculo, as *wavelets* analisam a magnitude do dado expresso em termos de suas linhas e colunas (ou, equivalentemente, coordenadas X e Y, N e E, ou  $\varphi, \lambda$ ), ou seja, levam em conta a anisotropia espacial dos dados. Têm-se, relativamente à CMQ clássica, portanto, uma nova dimensão auxiliar capaz de detectar variações segundo direções e distâncias bem determinadas. Apresenta-se, então, a variação lateral de densidade de potência espectral.

#### 4.1. Validação da escolha dos coeficientes do conjunto de *wavelets* adotada

O processo de análise e síntese - de separação e reconstrução - para a mesma matriz pode ser considerado bom estimador da validade da técnica. Se um dado conjunto de dados  $C$  puder ser discretizado em bandas  $A$  de alta frequência e  $B$  de baixa frequência e, posteriormente, se a recomposição de  $A$  e  $B$ , com a mesma técnica resultar em  $C$  com erros aceitáveis, os dados podem ser, nas mesmas condições em que foram decompostos, reconstruídos. A aceitabilidade do erro não é determinística e está associada a diversos fatores, como por exemplo, às diversas fontes de erros nos dados utilizados. Esta aceitabilidade pode ser quantificada via o cálculo ou do Erro Médio Quadrático RMS (*Root Mean Square*) ou da variância  $\sigma$  da diferença das matrizes originais e de síntese. Para resíduos muito baixos (e.g., da ordem de  $10^{-10}$  da amplitude média observada), entende-se que os estimadores de variância e/ou tendência central são dispensáveis. Considere-se que a unidade de trabalho usualmente empregada nos trabalhos associados aos sistemas de referência verticais é o metro e que erros da ordem do milímetro são suficientes para

a grande maioria das respectivas aplicações em engenharia. Então, efeitos da ordem de  $10^{-10}$  m dispensam estimadores estatísticos adicionais.

Um sucinto resumo deste raciocínio está apresentado na Figura 14.



**Figura 14** - Esquema proposto para a validação dos coeficientes.  
FONTE: O Autor.

Na validação, problemas operacionais devido ao *downsampling* são geralmente encontrados. Nesta pesquisa, estes problemas operacionais estão vinculados à utilização de grades retangulares: uma matriz originalmente com  $n$  linhas e  $m$  colunas, após a análise, gera novas grades de *aproximação* e *detalhes* que terão  $p$  e  $q$  linhas e colunas (respectivamente) dadas por:

$$\begin{aligned} p &= \text{ceil}(n/2) + 1 \\ q &= \text{ceil}(m/2) + 1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Em que *ceil* é a função maior inteiro. Assim, ao se associar uma base cartográfica às matrizes de *aproximação* e *detalhe*, matrizes de diferentes ordens são necessárias para que os limites entre as grades sejam os mesmos. Se este fato ocorre, então haverá diferentes escalas nas direções das linhas e colunas utilizadas e, considerando-se os algoritmos utilizados para as representações cartográficas, esta

situação não é desejável. Levando-se em conta a facilidade oferecida pela associação com as bases cartográficas na identificação de erros grosseiros, tal associação torna-se indispensável neste trabalho. Assim

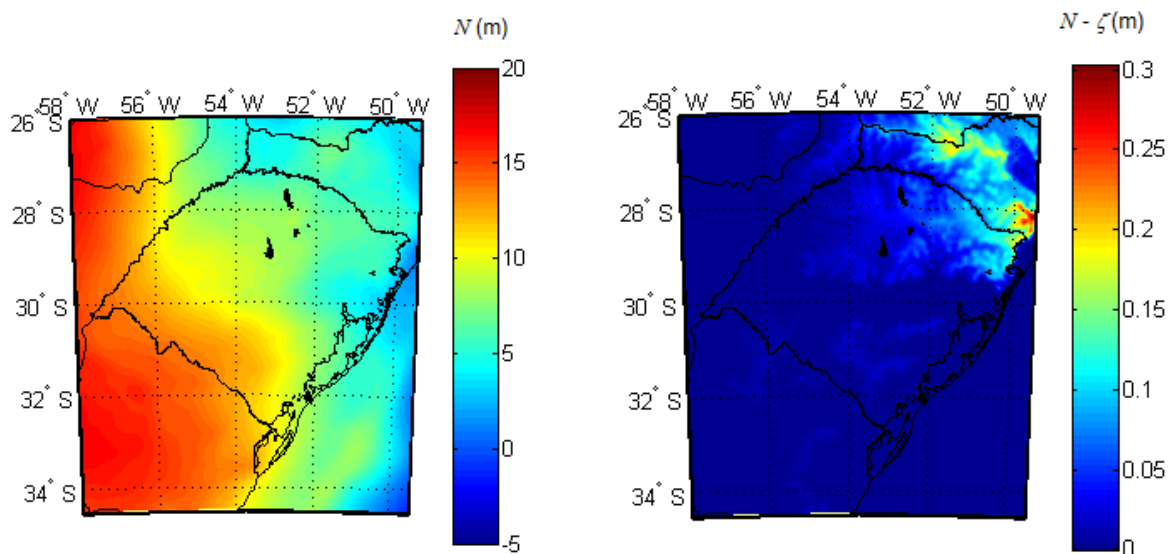
Devido a esta necessidade, então buscou-se evitar trabalhar com áreas que resultassem em diferentes escalas para as direções leste-oeste e norte-sul. Todavia, esta expectativa só se manteve no início dos trabalhos para a validação da escolha *wavelet*. Nos resultados finais, tornou-se impraticável trabalhar com matrizes quadradas em vista da base gravimétrica empregada.

Na rotina desenvolvida, somente um fator de escala (resolução) para todas as direções foi possível de ser introduzido. Eventuais dificuldades foram contornadas escolhendo-se grades com números  $n$  de linhas e  $m$  de colunas de tal modo que  $n$  e  $m$  sempre fossem pares. Deste modo, exercícios adicionais para compatibilizar matrizes oriundas do processo de *downsampling* são evitados. Uma rotina empregada é exemplificada no Apêndice A para uma grade de anomalias de altitude com  $m=n=512$  obtidas do EGM2008. Os valores para  $m$  e  $n$  foram escolhidos visando-se facilitar a escolha das matrizes envolvidas nos testes posteriores. Uma escolha vinculada a um número que possa ser reduzido a base 2 permite que seja conhecido à priori a ordem das demais matrizes que serão utilizadas na fusão dos dados.

Sabendo-se que o *downsampling* reduz sempre pela metade a ordem das matrizes, então para matrizes de melhor resolução é possível escolher ordens  $m=n=1024$ ,  $2048$ , etc. e para piores resoluções  $m=n=256$ ,  $128$ , etc., por exemplo. Na rotina mencionada, então se decompôs a grade utilizando a família de *wavelets* de *Daubechies* (maiores detalhes são apresentados nas próximas seções) e os resultados vinculados referentes a esta análise e síntese são apresentados na seção 5. A mesma rotina foi generalizada para grades de altitudes ou de efeitos vinculados às altitudes (Efeitos RTM ou Correções do Terreno).

Inicialmente, matrizes de *aproximação* e de *detalhes* de uma grade de anomalias de altitude foram estimadas utilizando-se da análise *wavelet*. Depois, das matrizes obtidas da análise, utilizando uma síntese *wavelet* exatamente com as mesmas características, recompôs-se a grade original. Os resíduos obtidos referem-se à diferença entre as grades reconstruída (sintetizada) e a original. Para as anomalias de altitude, as operações utilizadas consistem somente em organizarem-se as listas de dados derivadas dos modelos em uma grade para plotagem sobre

uma base cartográfica e, posteriormente, efetivar-se a análise ou decomposição. Devido à diferença conceitual (anomalias de altitude para a mesma região estão apresentadas na seção 5.1.1), na Figura 15 apresenta-se uma grade de alturas geoidais ( $N$ ) e a sua respectiva diferença em relação a sua homóloga grade de anomalias de altitude ( $\zeta$ ). Percebe-se que estas diferenças não superam os 30 centímetros, o que indica que aproximar alturas geoidais por anomalias de altitude não é um problema crítico para a região de estudos em questão.



**Figura 15** -  $N$  (esquerda) e  $N - \zeta$  (direita).  
FONTE: O Autor.

Em seguida, propõe-se o mesmo procedimento para altitudes e suas quantidades derivadas e então as *aproximações* e os *detalhes* da decomposição *wavelet* para as altitudes são apresentados. De fundamental importância neste trabalho são as correções do terreno (TCs) e o Efeito *Residual Terrain Model* (RTM), vinculados respectivamente às Teorias de obtenção do Geoide/Quasegeoide. Ambos os efeitos estão vinculados aos curtíssimos comprimentos de onda do Geopotencial e representam os possíveis caminhos disponíveis atualmente para a contribuição do ganho de acurácia e resolução nos modelos globais em regiões de interesse.

Nesta pesquisa, os efeitos TC e RTM foram calculados em um primeiro momento por um conjunto de rotinas conhecido como *Gravsoft* cujas equações e expressões programadas são referência nas mais diversas pesquisas. O *Gravsoft*, já mencionado, é fornecido em cursos denominados da *International Geoid School*

(Escola do Geóide) da Associação Internacional de Geodésia (IAG) voltados ao treinamento de técnicas associadas à determinação do geoide gravimétrico.

A versão original do *Gravsoft* não permite que os efeitos TC e RTM sejam calculados quando matrizes de ordem superior a 400 são utilizadas. Inicialmente, para dirimir este problema, uma rotina de integração numérica para o cálculo de TC em ambiente *Matlab* foi criada. O programa desenvolvido para a determinação dos efeitos RTM não se apresentou estável e por isso, no caso deste funcional optou-se por trabalhar em regiões menores ou pela deterioração da resolução do modelo, fazendo o uso exclusivo das ferramentas da Escola do Geoide. É importante dizer também que estes efeitos na Região A mostraram-se pouco significativos. A rotina para TC em ambiente *Matlab* se mostrou estável e está apresentada no APÊNDICE C.

No cálculo dos efeitos TC e RTM inicialmente realizados com o *Gravsoft*, a ordem das matrizes associadas  $n=m=512$  foi substituída por  $n=m=392$ . Extraíram-se 60 linhas e colunas dos bordos preservando-se os resultados centrais - as 60 linhas ou colunas são equivalentes a um grau em latitude e longitude (cada pixel tem resolução espacial de um minuto de arco para este estudo inicial). Esta substituição foi necessária porque as rotinas consideradas utilizam transformadas de Fourier cujos resultados acarretam em efeitos nas bordas das matrizes. Estes efeitos são da ordem de dez vezes o resultado médio da grade se tal efeito inexistisse. Para operar os resultados do *Gravsoft* (com recortes), a sua integração com a base cartográfica, e as *wavelets* desenvolveu-se outra rotina, apresentada no APÊNDICE B.

Por fim, a síntese de alturas geoidais, altitudes e quantidades derivadas de altitudes visam verificar a estabilidade da transformada para quantidades de diferentes naturezas (e.g. altura geoidal de natureza física e topografia como elemento geométrico<sup>4</sup>) levando-se em conta as suas também diferentes magnitudes. Em geral, a diferença entre as transformadas direta e inversa apresenta resíduos tão pequenos que julgou-se não ser pertinente a abordagem em termos ou da sua variância ou de outros testes estatísticos. Testaram-se pelo menos três famílias de

---

<sup>4</sup>É difícil separar o significado geométrico do físico quando o tema são as altitudes ou os desníveis. Entenda-se as altitudes e desníveis como elementos geométricos com elevadas variabilidades laterais e, as alturas geoidais como associadas a uma superfície física equipotencial de variação suave.

*wavelets*, cujos resultados estão na seção 5. Os diagramas das *wavelets* utilizadas estão apresentados no Apêndice K.

A validação cruzada foi realizada tendo como base a matriz original dos efeitos obtidos e a matriz da transformada *wavelet* inversa dos mesmos efeitos. O procedimento adotado é enumerado em dez etapas: I) Extração da primeira linha de dados da matriz original; II) Ajuste de um polinômio para os elementos desta linha; III) avaliação do polinômio para o primeiro elemento desta linha; IV) Substituição do primeiro elemento da primeira linha da matriz original pelo primeiro elemento da primeira linha da matriz de síntese; V) Ajuste de um polinômio de mesmo grau que o ajustado em II com o conjunto misto de dados; VI) Avaliação do efeito do último polinômio para o primeiro elemento da primeira linha; VII) Subtração do efeito obtido em III do efeito obtido em VI; VIII) Passa-se ao segundo elemento da primeira linha, repetindo todo o processo até que toda a linha seja avaliada; IX) Verifica-se a segunda linha; X) O restando da grade é verificado realizando-se o mesmo processo para as demais linhas da matriz.

Com a metodologia do parágrafo anterior é possível obter uma matriz que representa as diferenças entre os polinômios ajustados para os dados originais e para os dados mistos. Nesta tese, considerou-se um polinômio de grau um por entender-se que o efeito da modificação do dado a ser ajustado era muito baixo e pelo tempo de inversão das matrizes utilizadas durante o ajuste destes polinômios – um para cada elemento da matriz - muito menor relativamente aos polinômios de ordem superior.

A validação cruzada não se mostrou mais eficiente que a simples diferença entre os dados originais e sintetizados para detectar problemas na modelagem com *wavelets*. Assim, na seção de resultados apresentou-se somente uma sequência destes resultados para as anomalias de altitude. O algoritmo utilizado para a validação cruzada está apresentado no Apêndice M e os resultados para esta validação estão no apêndice N.

## 4.2. Fusão dos Longos, Médios e Curtos Comprimentos de Onda com base em *Wavelets*

Tomando as características do processo de *downsampling*<sup>5</sup> e conhecendo as propriedades das transformadas *wavelet*, é possível concatenar médios, longos e curtos comprimentos de onda do Geopotencial em uma única solução. A cada transformada há uma degradação da resolução espectral, produzindo-se novas matrizes com metade da ordem (resolução) da original. Considere-se inicialmente uma matriz A com informações ligadas aos longos comprimentos de onda do geopotencial e uma Matriz B com informações relacionadas aos curtos comprimentos de onda do geopotencial. Considere-se também os subíndices A e D, como vinculados ao produto de transformadas *wavelet*, respectivamente representando matrizes de *aproximação* e *detalhe*. Quando conveniente, subíndices h, v e d serão utilizados junto com D, para expressar detalhes horizontais, verticais e diagonais, respectivamente.

Com base nestas considerações, é possível estabelecer a seguinte hipótese:

- Se uma matriz de alta resolução B, cujas funcionais não modelam adequadamente os longos comprimentos de onda do geopotencial puder ser degradada (analisada) até tornar-se uma matriz de baixa resolução com mesma resolução espectral de  $A_A$ , representativa do mesmo espaço do Geopotencial, então é possível substituir a matriz de aproximações  $B_A$  por informações oriundas de uma matriz associada aos longos comprimentos de onda ( $A_A$ ), cujas funcionais representativas do geopotencial modelam melhor o geopotencial naqueles comprimentos de onda.

O resultado de suas transformadas inversas sucessivas (sínteses), a partir de matrizes do tipo  $A_A$  e  $B_D$ , com os coeficientes do downsampling anterior até a resolução espectral mais alta conterão o espectro completo de ambas as matrizes utilizadas, com a vantagem de substituir as informações duvidosas (por exemplo, livres de referencial) originais dos longos comprimentos de onda B por informações

---

<sup>5</sup> Doravante, processo de degradação da resolução espectral do modelo.



mais consistentes contidas na matriz A (por exemplo, onde o referencial está evidente). As ordens de A e B devem ser compatíveis para que essa operação seja possível.

Esta é a hipótese norteadora deste estágio da pesquisa. Intenciona-se combinar, portanto, a matriz de *aproximação* de um conjunto de dados com a matriz de *detalhes* de outro. Este processo é realizado substituindo-se a matriz de *aproximação* (matriz de análise) dos curtos comprimentos de onda pela matriz de *aproximação* (também se trata de uma matriz de análise) dos longos comprimentos de onda e efetuando-se a transformada *wavelet* inversa (síntese). Para se chegar às mesmas resoluções, transformações sucessivas são necessárias.

É importante ter em mente que a cada transformada *wavelet* o processo *downsampling* é responsável por gerar um vetor ou matriz com metade da sua resolução original. Assim, uma escolha adequada da resolução das matrizes envolvidas é essencial para que a transformada inversa (síntese) seja possível. Considere-se para isto as matrizes A e B, já enumeradas, com resoluções  $p$  e  $q$ . Para que se tenha efeitos compatíveis com as resoluções, as grades devem obedecer aos seguintes aspectos:

- a) Se a grade de alta resolução possui  $p$  linhas x  $p$  colunas, então ao filtrar (analisar) a grade  $n$  vezes, têm-se numa nova resolução  $((((p/2_1)/2_2)/2_3)..../2_n)$ .  $2_n$  é a enésima vez em que se divide  $p$  por 2. A nova resolução, manifestada ou pelo número de linhas ou pelo número de colunas agora pode ser expressa sem prejuízos por  $p/2^n$ . Agora  $n$  é o expoente da base 2, com o mesmo significado da frase anterior;
- b)  $q$  deve ser igual a  $p/2^n$ , ou seja,  $q = p/2^n$ , para que na substituição da matriz de *aproximação* dos longos comprimentos de onda pela matriz de *aproximação* dos curtos comprimentos de onda, as ordens sejam as mesmas;
- c) as transformadas inversas (síntese) devem ser realizadas.

Nas figuras 16 e 17, a seguir, apresentam-se os casos para 5 níveis de decomposição. Na figura 16 a matriz de *aproximações* que contém somente os longos comprimentos de onda  $A_A$  substitui a matriz  $B_A$ , que é a matriz de *aproximação* dos curtos e/ou curtíssimos comprimentos de onda do geopotencial.

Na figura 17, apresenta-se o fluxograma de decomposição da figura 16:  $S$  é a matriz que contém o sinal completo,  $A$  é a matriz de aproximações e  $D$  é a matriz de detalhes. À esquerda, a decomposição em um único nível é apresentada, e, à direita, a decomposição em cinco níveis. Ambos fluxogramas seguem o esquema da figura 16.

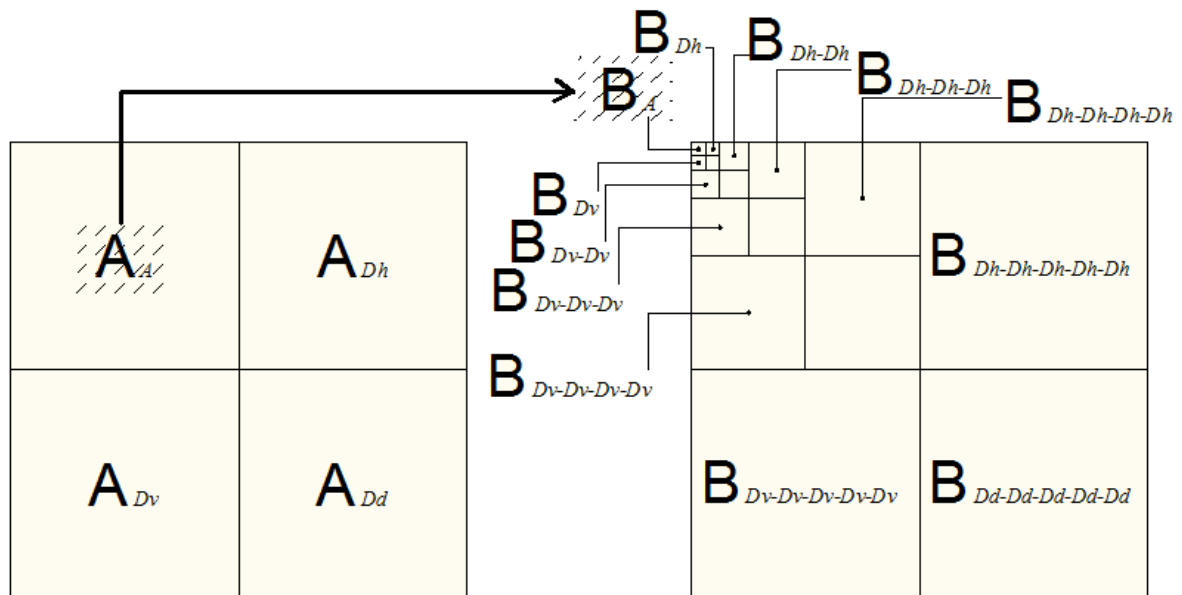


Figura 16 - Esquema de substituição das matrizes de *aproximação*. À esquerda, apresenta-se a decomposição dos longos comprimentos de onda do Geopotencial; à direita, dos curtos comprimentos de onda do Geopotencial.  
FONTE: O Autor.

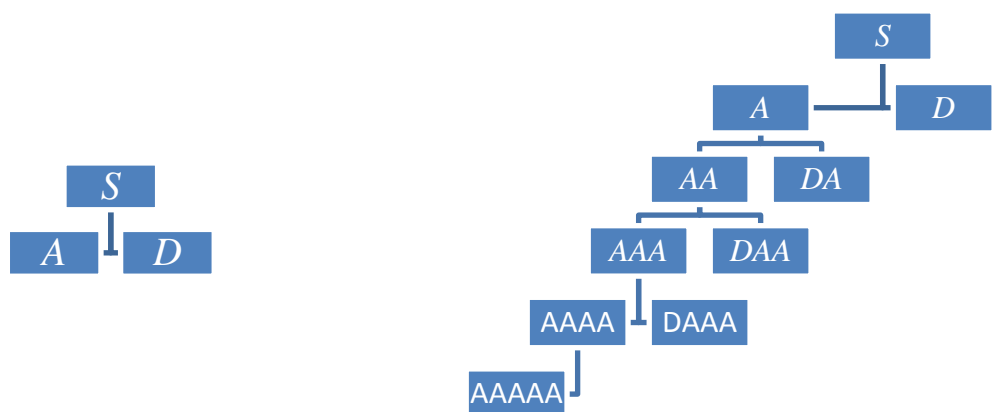


Figura 17 - Esquema da decomposição das matrizes originais. À esquerda, a decomposição dos longos comprimentos de onda; à direita, a decomposição dos curtos comprimentos de onda.  
FONTE: O Autor.

As considerações desta seção apontam para um raciocínio fundamental desta pesquisa: deve ocorrer o *downsampling* da matriz de curtos comprimentos de onda até que seja atingida a metade da resolução da matriz dos longos comprimentos de onda.

#### 4.3. Caracterização dos funcionais utilizados na fusão dos dados

A abordagem apresentada até agora tratou somente do processo do ponto de vista metodológico, sem fazer menção detalhada às quantidades que poderiam ser utilizadas em tal processamento. Deste modo, cabe apresentar quais as quantidades que serão utilizadas ou como *aproximação* ou como *detalhe* e justificar a motivação destas escolhas.

Inicialmente, coloca-se que desde a década de 60 existem indícios para considerar as informações provenientes de um MGG como *portadoras* da *aproximação*. Dois importantes aspectos, que estão ligados à escolha de informações vinculadas às altitudes como representativas dos *detalhes*, são a magnitude e a frequência associada aos modelos disponibilizados. Para que a escolha dos funcionais concorde com as características das transformadas *wavelet* é fundamental que os dados representativos da *aproximação* sejam suaves e com magnitude, relativamente aos *detalhes*, maior. A elevada magnitude relativamente aos MDAS, a suavidade e outras, são características presentes nas informações vinculadas aos MGGs. Se o objetivo for exclusivamente a determinação de valores da gravidade sobre pontos específicos, entretanto, poderia se trabalhar com valores da gravidade ou anomalias da gravidade derivadas dos MGGs. Para o caso específico da escolha das anomalias da gravidade, elas devem ser derivadas do MGG porque é o único modo de garantir-se que este tipo de informação esteja em uma faixa exclusiva do espectro, necessário à representação das *aproximações*. O contraste é observado quando se utiliza observações terrestres ou derivadas de outras técnicas, as quais poderiam ser melhor representativas dos *detalhes*, dado o seu preenchimento completo no espectro do geopotencial.

A escolha da grandeza vinculada aos *detalhes*, todavia, embora pareça igualmente evidente, não fornece a mesma consistência. Ao transformar quantidades derivadas dos MDAs em quantidades gravimétricas e, por sua vez em

resíduos de alturas geoidais (ou, equivalentemente, em efeitos RTM), a fusão resulta valores não-realísticos quando comparados com os efeitos derivados das fusões provenientes exclusivamente de altitudes. Tal discrepância parece estar vinculada à magnitude dos *detalhes* resultante das diferentes grandezas empregadas.

Assim, o raciocínio do Quadro 2 pode ser empregado, baseado nas distintas frequências e magnitudes dos modelos utilizados:

**Quadro 2** - Caracterização das possibilidades para fusão de dados com base em *wavelets*.

FONTE: O Autor.

Item	Se (matriz A – seção 4.2)	Então (matriz B – seção 4.2)
I	a matriz de <i>aproximação</i> está representada por dados provenientes dos MGGs,	a matriz dos <i>detalhes</i> será proveniente ou da gravimetria terrestre, ou de efeitos derivados dos MDAs
II	a matriz de <i>aproximação</i> está representada por dados provenientes da gravimetria terrestre,	a matriz dos <i>detalhes</i> será proveniente de efeitos derivados dos MDAs;
III	a matriz de <i>aproximação</i> está representada por dados provenientes dos MDAs, ou de efeitos derivados dos MDAs,	Só é possível compatibilizar a fusão mediante a escolha de matrizes que contenham resolução melhor e magnitude menor que dados presentes na matriz de <i>aproximação</i> .

Os experimentos desta pesquisa foram baseados na proposição apresentada no Item I do Quadro 2.

#### 4.4. Introdução da densidade da crosta como forma de melhorar a informação presente nos *detalhes*

Considere-se respectivamente as expressões para a Correção do Terreno (*TC*) (MORITZ, 1968 apud KIRBY & FEATHERSTONE, 1999), no seu *kernel* planar e para o efeito RTM ( $V_{RTM}$ ), por definição (NAGY et al., 2000), e a sua correspondente avaliação em termos do potencial gravitacional (HIRT et Al., 2010):

$$TC = \frac{G\rho R^2}{2} \iint_{\sigma} \frac{(H_P - H_{P'})^2}{l_0^3} \cdot d\sigma \quad (4.2)$$

$$U(P) = u(P)G\rho; \quad u(P) = \int_v \frac{dv}{r} = \int_v \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{r} \quad (4.3)$$

$$V_{RTM} = G\rho \left[ \left| xy \cdot \ln(z+r) + yz \cdot \ln(x+r) + zx \cdot \ln(y+r) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{x^2}{2} \tan^{-1}\left(\frac{yz}{xr}\right) - \frac{y^2}{2} \tan^{-1}\left(\frac{zx}{yr}\right) - \frac{z^2}{2} \tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right) \right|_{x_1}^{x_2} \right|_{y_1}^{y_2} \right|_{z_1}^{z_2} \quad (4.4)$$

Neste caso para a equação (4.2) têm-se:

- $TC$  : Correção do Terreno
- $G$  : Constante Gravitacional
- $R$  : Raio médio da Terra
- $H_P$  : Altitude do Ponto  $P$  onde se deseja obter a TC
- $H_{P'}$  : Altitude o ponto  $P'$  que está varrendo a grade
- $l_0$  : Distância entre os pontos  $P$  e  $P'$
- $\sigma$  : Área da Superfície escolhida para a qual se deseja obter TC
- $\rho$  : Densidade do material presente entre a superfície passante pelo ponto de cálculo e ponto da grade de varredura.

Na (4.3)  $U(P)$  é o potencial de um prisma avaliado em um ponto  $P$ , que neste caso é representado pelo potencial  $V_{RTM}$ , da (4.4).  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  são elementos diferenciais de um volume diferencial  $dv$ , e para a equação (4.4), os termos que ainda não foram definidos são:

- $V_{RTM}$  : RTM em termos do potencial gravitacional
- $x, y, z$  : Componentes cartesianas de um sistema de coordenadas planorretangulares
- $r$  : Distância entre o ponto de coordenadas  $x, y$  e  $z$  e a origem do Sistema de Referência;

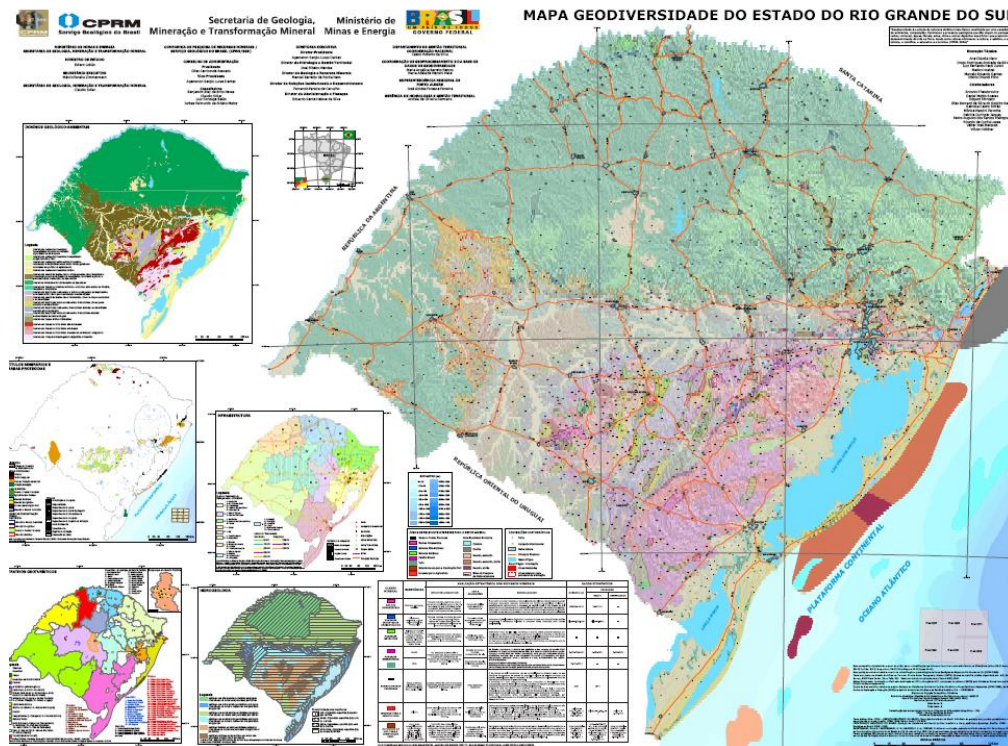
$V_{RTM}$  é convertido em anomalias de altitude pelo Teorema de Bruns, apresentado sem pormenores na (4.4) e dado por Hoffman-Wellenhof e Moritz (2005):

$$\zeta = \frac{V_{RTM}}{\gamma} \quad (4.4)$$

Aqui,  $V_{RTM}$  foi substituído pelo potencial perturbador  $T$ , para concordância dos conceitos. Recorde-se que a densidade  $\rho$  entre as superfícies dos pontos de cálculo e dos pontos de varredura é considerada usualmente constante igual a  $2,67 \text{ g/cm}^3$ . O Serviço Geológico do Brasil (CPRM) disponibiliza cartas vinculadas à composição

superficial/subsuperficial para algumas regiões do Brasil. Estas cartas apresentam, no entanto, diversos obstáculos quanto à aquisição de informações associadas, como por exemplo a) escala reduzida, b) sobreposição de diversos tipos de informação, c) sistema de referência sujeito a diferentes interpretações, dentre outros problemas. Exemplos destas dificuldades estão apresentados nas figuras 18, 19 e 35.

Caso estas informações pudessem ser vinculadas com valores de densidade dos materiais caracterizados as análises referentes às densidades poderiam ser implementadas.



**Figura 18** - Geodiversidade para o estado do Rio Grande do Sul.

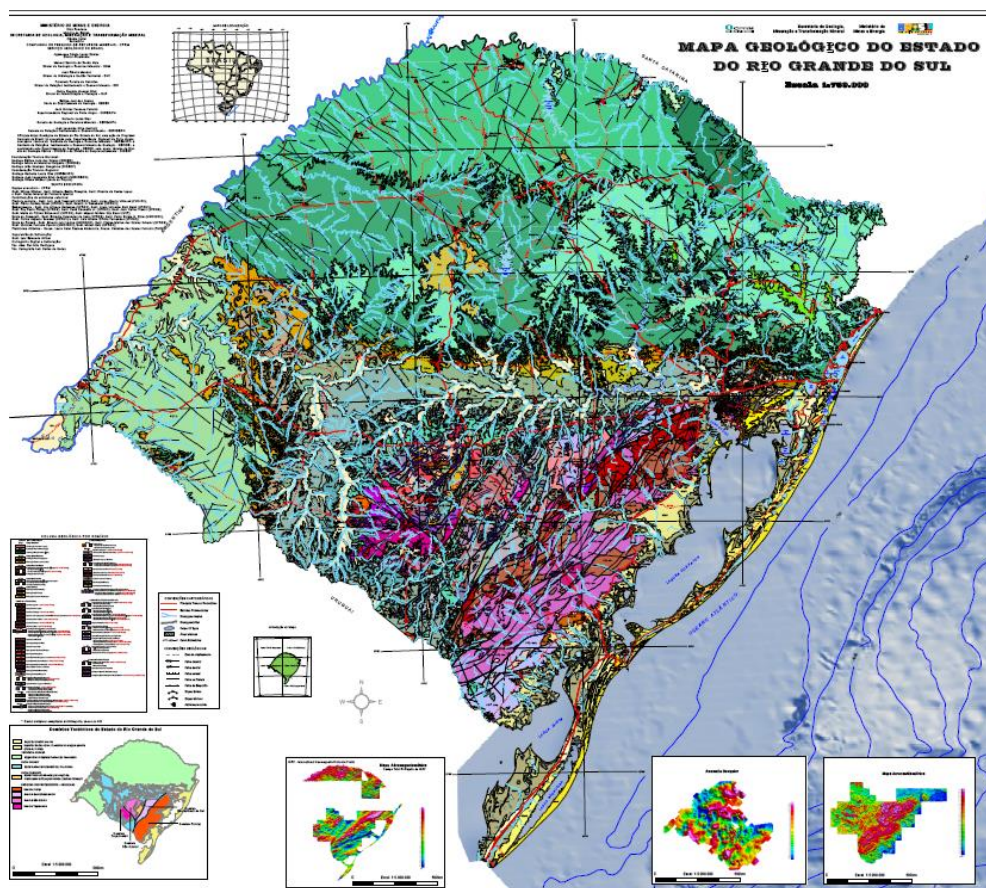
FONTE: CPRM, 2012. Disponível em < <http://www.cprm.gov.br/> > Acesso em 03/02/2013.

Se houvessem associações diretas das estruturas geológicas nestes tipos de carta com as densidades dos materiais, rotinas de busca poderiam recuperar a informação de densidade do ponto de cálculo e associá-la ao prisma que está sendo adicionado no momento do cálculo ou dos efeitos RTM ou TC. Esta operação soma-se às *wavelets* no sentido de preservar as variações laterais do espectro.

Matrizes de densidades poderiam ser obtidas tabulando-se as cores segundo uma escala (0 até 255) e associando-a a densidade do respectivo material.



Ao encontrar uma determinada cor na matriz de densidades, o sistema associaria a cor à correspondente densidade. Ademais dos fatos que a) a escala da carta disponível não seja suficiente para representar pequenas variações de densidade, b) existem erros ocasionados na predição das isolinhas que delimitam as zonas geológicas, c) o fato da densidade ser obtida exclusivamente de elementos superficiais, e ainda, outros problemas: tal hipótese poderia ser avaliada.



**Figura 19** - Mapa Geológico para o estado do Rio Grande do Sul. FONTE: CPRM, 2012. Disponível em < <http://www.cprm.gov.br/> > Acesso em 03/02/2013.

Todavia, apesar das publicações acima (Figuras 18 e 19), não foi possível encontrar valores de densidade representativos para todos os elementos apresentados nas cartas da CPRM - a falta de regularidade não permitiu utilizar esta base de dados. Além disso, houve dificuldades quanto ao reconhecimento do SGR utilizado para a elaboração das Cartas.

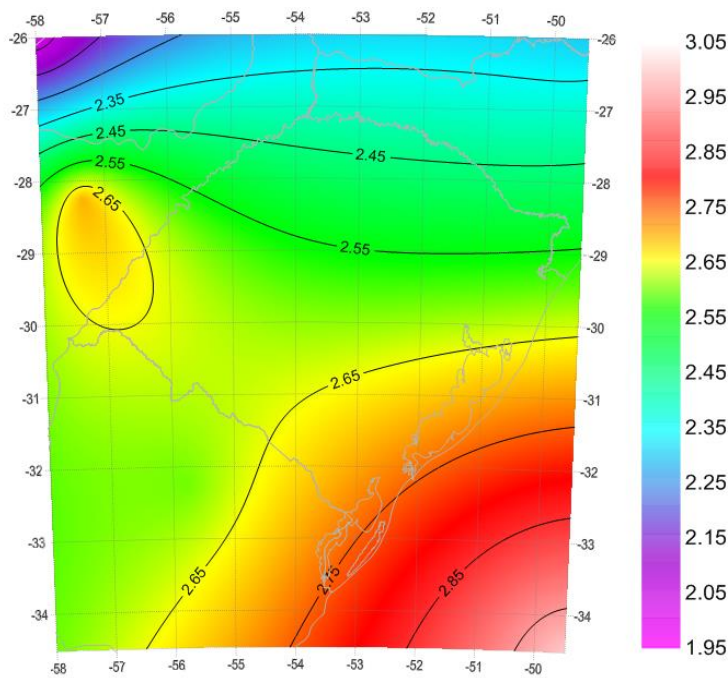
Em havendo uma base de dados de densidades digital, certamente a metodologia descrita poderá ser empregada. Neste trabalho, devido as dificuldades acima mencionadas, sobretudo da inexistência de uma base consistente, gerou-se

uma base de dados de densidades sintética para demonstrar esta etapa da metodologia. A base de dados foi formada por uma matriz gerada a partir da krigagem ordinária dos elementos apresentados no Quadro 3:

**Quadro 3** - Elementos utilizados para a geração da matriz de densidades sintética.  
FONTE: O Autor.

Ponto	Latitude ( ° )	Longitude ( ° )	Densidade (g/cm³)
01	-26.00000000	302.00000000	2.0
02	-26.00000000	310.51666666	2.3
03	-34.51666667	302.00000000	2.6
04	-34.51666667	310.51666666	3.0
05	-28.25000000	302.65000000	2.7
06	-32.25000000	304.25000000	2.6

que resultou em uma matriz de 512 linhas por 512 colunas apresentada na Figura 20.



**Figura 20** - Matriz de Densidades Sintética utilizada para simulação de alguns testes com variações laterais de densidade. Unidades em g/cm³.  
FONTE: O Autor.



## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Objetivando-se ao primeiro contato com efeitos, da transformação direta das quantidades trabalhadas, apresentam-se as *aproximações*, os *detalhes* horizontais, os *detalhes* verticais e os *detalhes* diagonais; da transformação inversa apresentam-se o sinal reconstruído e os resíduos. Depois, suprimiram-se estas etapas, apresentando-se somente os resíduos. Em vista da pequena diferença em termos da magnitude e significado (as magnitudes dos resíduos encontrados são inferiores à  $10^{-10}$  da amplitude média analisada), optou-se por não se realizar o mesmo estudo para alturas geoidais, uma vez que este estudo já foi realizado para anomalias de altitude (verifique que as diferenças entre as quantidades também não são suficientes para justificar novos estudos, conforme a seção 4.1). O mesmo raciocínio foi empregado para os dados de validação cruzada. Como já manifestado, a magnitude das diferenças avaliadas com esta técnica, independentemente da família de *wavelets* escolhida, mostrou-se muito pequena (da ordem  $10^{-15}$ ) e foi insuficiente para detectar problemas na modelagem. Assim, assinalaram-se somente os resultados referentes às anomalias de altitude, que estão no Apêndice N.

### 5.1. Validação da família de *wavelets* utilizada para longos e curtos comprimentos de onda do geopotencial

#### 5.1.1. Validação de Dados associados aos longos comprimentos de onda do geopotencial-

Do serviço de cálculo disponibilizado pelo ICGEM, obteve-se uma grade de anomalias de altitude referidas ao MGG EGM2008 truncado no grau 360, com as características presentes no cabeçalho do arquivo fornecido pela instituição geradora, e apresentados na Tabela 1, a seguir:

Tabela 1 - Cabeçalho do Arquivo de Anomalias de Altitude Geradas pelo ICGEM para o MGG EGM2008 truncado no grau 360.

FONTE: ICGEM, 2012

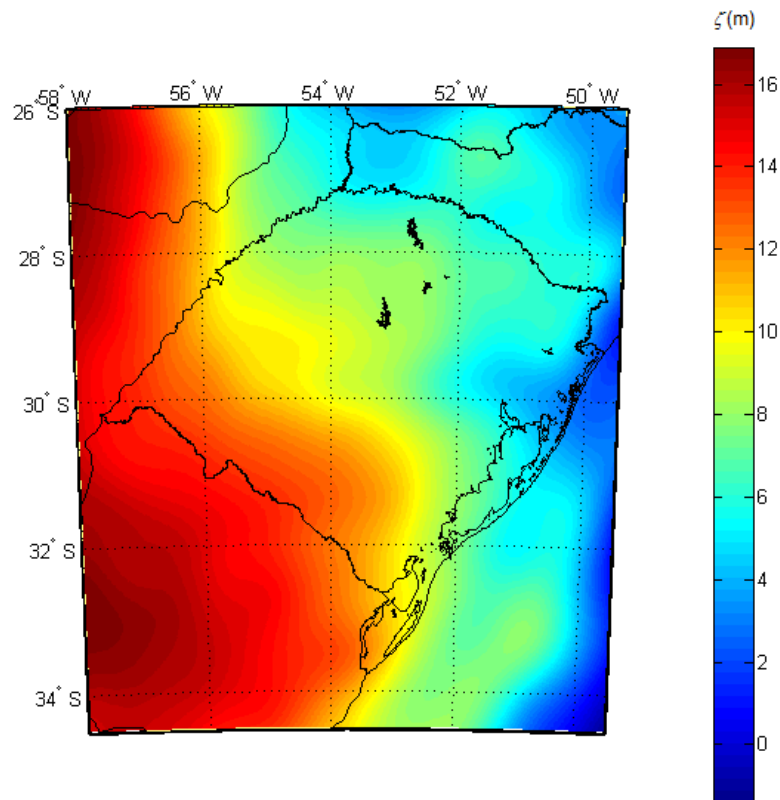
generating_institute	:	gfz-potsdam
generating_date	:	21/11/2012
product_type	:	gravity_field
body	:	earth

---

modelname	: egm2008upto360
max_used_degree	: 360
tide_system	: tide_free
functional	: height_anomaly
zero_degree_term	: included
unit	: meter
refsysname	: GRS80
gmrefpot	: 3.98600500000E+14 m**3/s**2
radiusrefpot	: 6378137.000 m
flatrefpot	: 3.352810681183638E-03 (1/298.25722210088)
omegarefpot	: 7.29211500000E-05 1/s
normal_potential	: 6.263686085004611E+07 m**2/s**2
long_lat_unit	: degree
latlimit_north	: -26
latlimit_south	: -34.51666666
longlimit_west	: 302
longlimit_east	: 310.5166667
gridstep	: 1.67E-02
latitude_parallels	: 512
longitude_parallels	: 512
number_of_gridpoints	: 262144
gapvalue	: 999
weighted_mean	: 9.5779198E+00 meter
maxvalue	: 1.6895125E+01 meter
minvalue	: -1.3989054E+00 meter
signal_wrms	: 4.2083314E+00 meter
grid_format	: long_lat_height_value

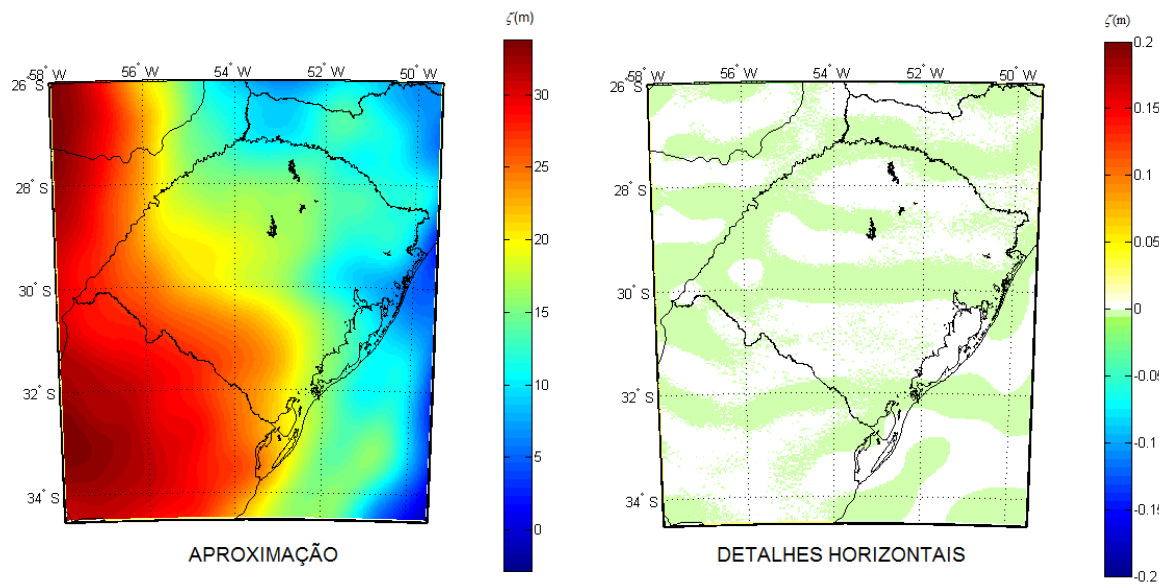
---

A representação da grade referente ao arquivo está na Figura 21, com resolução aproximada de 1 minuto de arco:

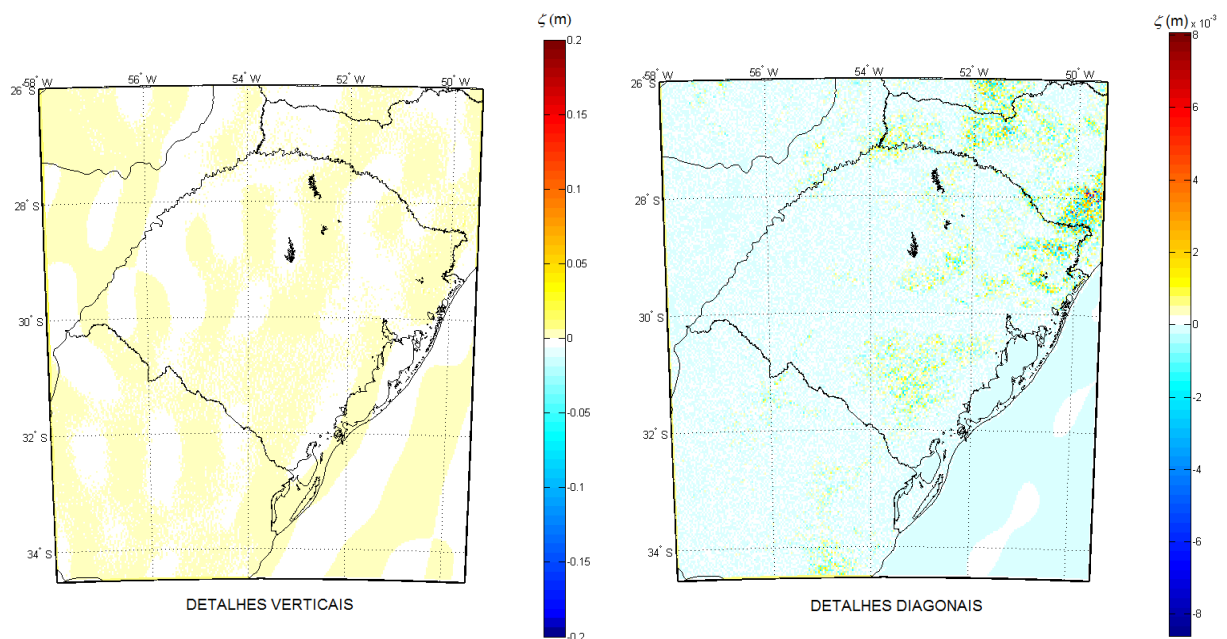


**Figura 21** – Anomalias de altitude para o EGM2008.  
FONTE: O Autor.

Apresenta-se na sequência uma decomposição em *wavelets* de *Daubechies* db2 com dois momentos nulos (conforme Misity et al,2011), têm-se a *aproximação* (à esquerda) e os *detalhes* horizontais (à direita), na Figura 22; os *detalhes* verticais (à esquerda) e os *detalhes* diagonais (à direita), na Figura 23.

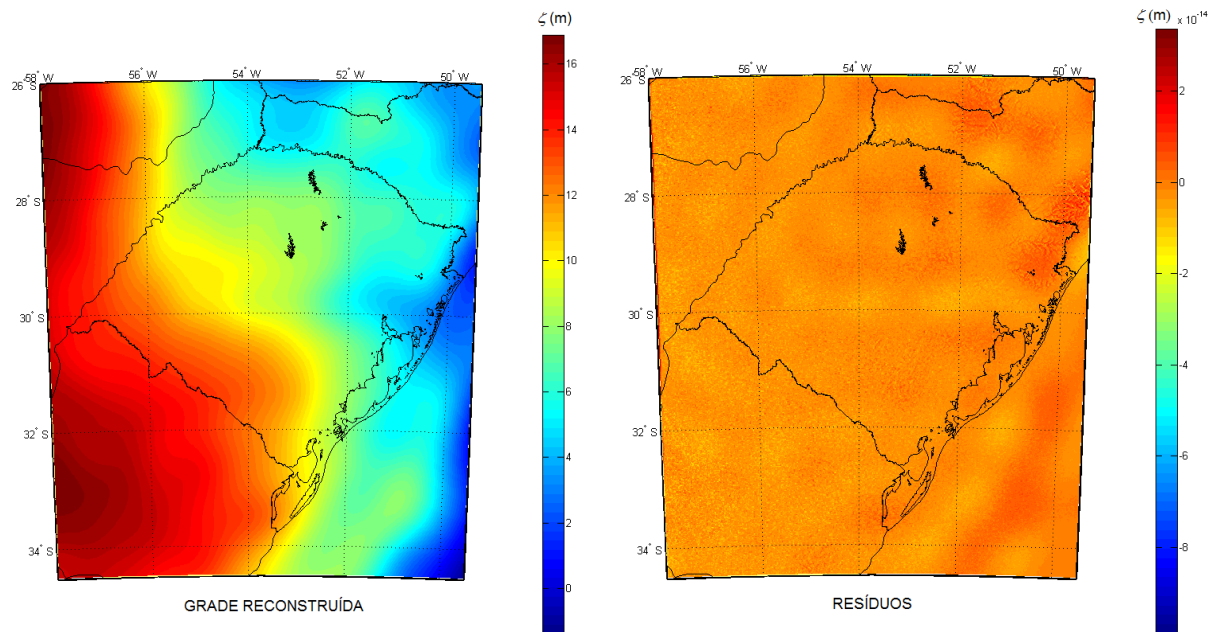


**Figura 22-** Decomposição de anomalias de altitude referidas ao EGM2008 truncado no grau 360 utilizando *wavelets* de *Daubechies*.  
 FONTE: O Autor.



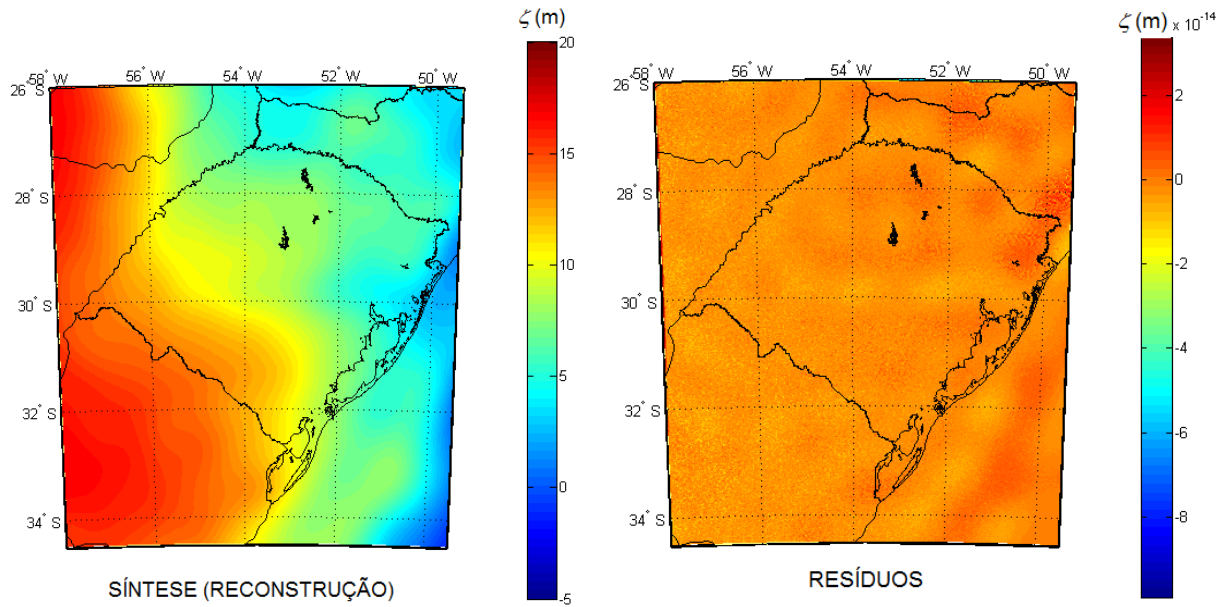
**Figura 23-** Decomposição de anomalias de altitude referidas ao EGM2008 truncado no grau 360 utilizando *wavelets* de *Daubechies*.  
 FONTE: O Autor.

A grade reconstruída - *EGM2008Recon* - a partir das matrizes de *aproximação*, coeficientes das matrizes de *detalhe* horizontais, verticais e diagonais é apresentada com a grade das diferenças entre a grade original e a *EGM2008Recon*, a seguir, na Figura 24.



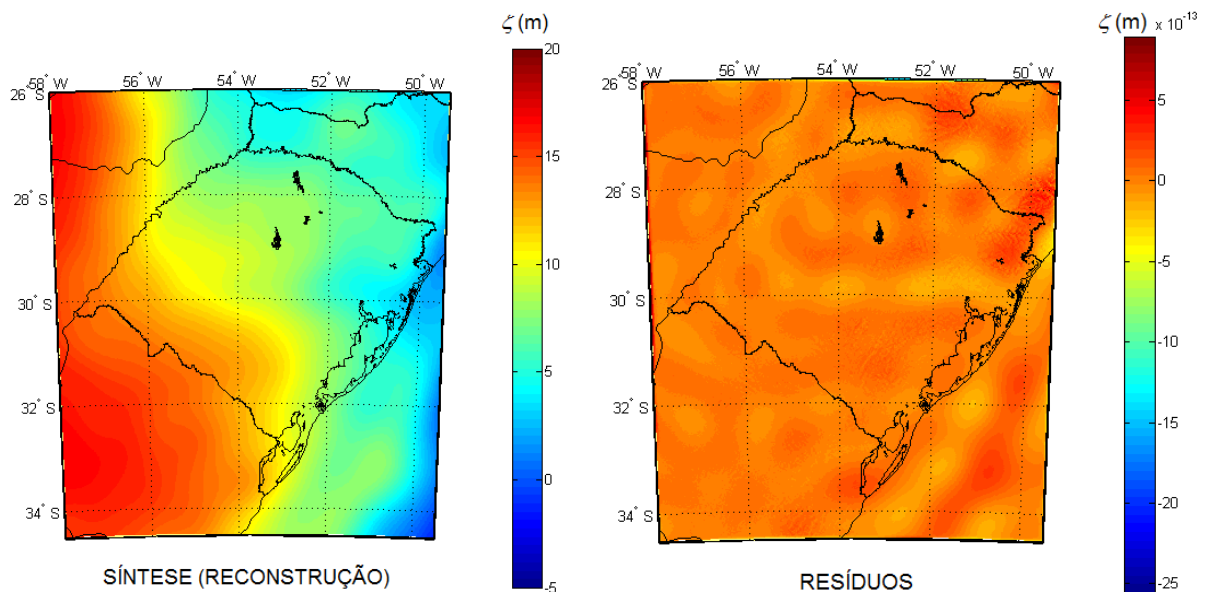
**Figura 24-** Grade *EGM2008Recon* e resíduos da diferença relativamente à grade original.  
 FONTE: O Autor.

É importante destacar que os testes de análise e síntese tiveram comportamentos similares (Resíduos menores que o centésimo do milímetro) para diferentes famílias de *wavelets* testadas e também na validação cruzada. Como exemplo, apresentam-se somente as reconstruções e resíduos destes casos: para a família de *wavelets Symlets2*; para a família de *wavelets Coiflets2*; e para a família de *wavelets Biortogonais2.4*. Estes resultados estão nas Figuras 25, 26 e 27.

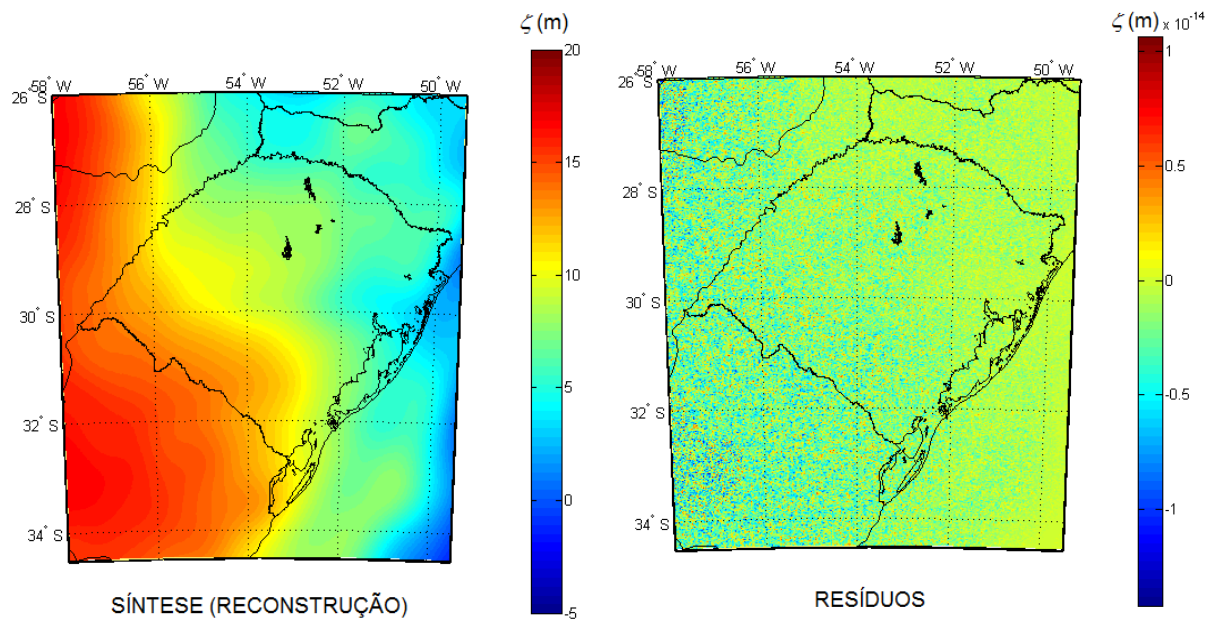


**Figura 25-** Reconstrução de anomalias de altitude utilizando *wavelets* da família *Symlets2*.  
 FONTE: O Autor.

A similaridade dos resíduos para análise e síntese da mesma quantidade a partir de diferentes famílias de *wavelets* não permite fazer inferências sobre a escolha de uma única família de funções deste tipo para a reprodução de informações dos longos comprimentos de onda do geopotencial. Assim, procedeu-se à mesma análise para os curtos comprimentos de onda. Esta resultou em comportamento semelhante aos então apresentados (Seção 5.1.2).



**Figura 26** Reconstrução de anomalias de altitude utilizando *wavelets* da Família *Coiflets2*.  
 FONTE: O Autor.



**Figura 27** - Reconstrução de anomalias de altitude utilizando *wavelets* da Família *Biortogonais2.4*.  
 FONTE: O Autor.

#### 5.1.2. Validação de Dados associados aos curtos comprimentos de onda do Geopotencial

Os curtos comprimentos de onda do geopotencial, neste trabalho, normalmente estão associados às informações provenientes de MDA. A priori, objetiva-se uma análise das magnitudes brutas, sem transformá-las em outras quantidades. Como já foi descrito, nesta concepção inicialmente apresentam-se: a) a *aproximação*, b) os *detalhes* horizontais, os *detalhes* verticais e os *detalhes* diagonais, c) a reconstrução a partir da *aproximação* e dos *detalhes* e, d) os resíduos da matriz reconstruída relativamente à matriz original. Depois se faz a análise das Correções do Terreno e do efeito RTM derivados das mesmas altitudes. Nestes últimos dois casos apenas se apresenta a matriz original e os resíduos da síntese quando comparada à matriz original.

Uma grade regular de altitudes derivadas do MDA ETOPO1 expandido até o grau 2250 pode ser obtida do ICGEM, tal como na seção anterior para o MGG. O cabeçalho do arquivo gerado é apresentado abaixo:



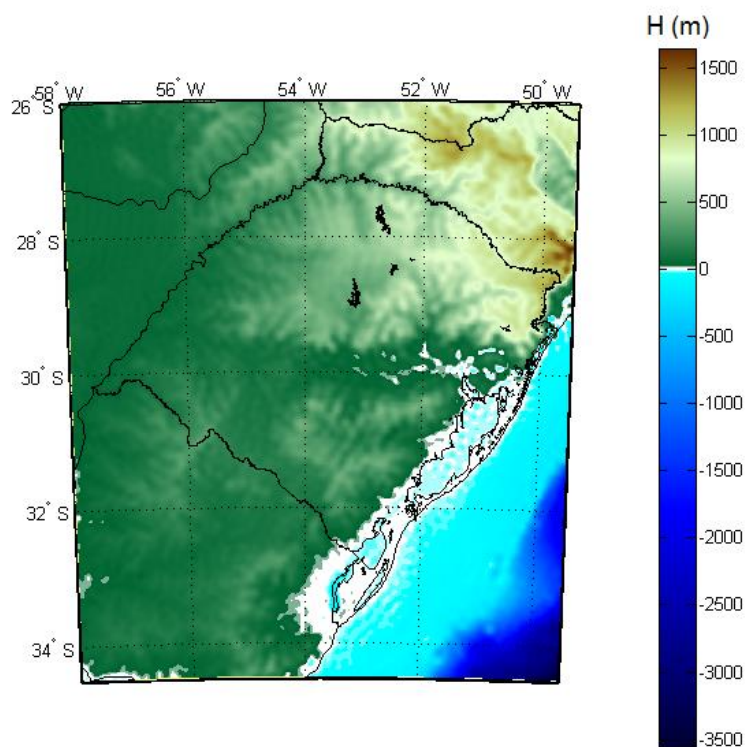
Tabela 2 - Cabeçalho do Arquivo de Altitudes Geradas pelo ICGEM para o DEM ETOPO1.  
FONTE: ICGEM, 2012

---

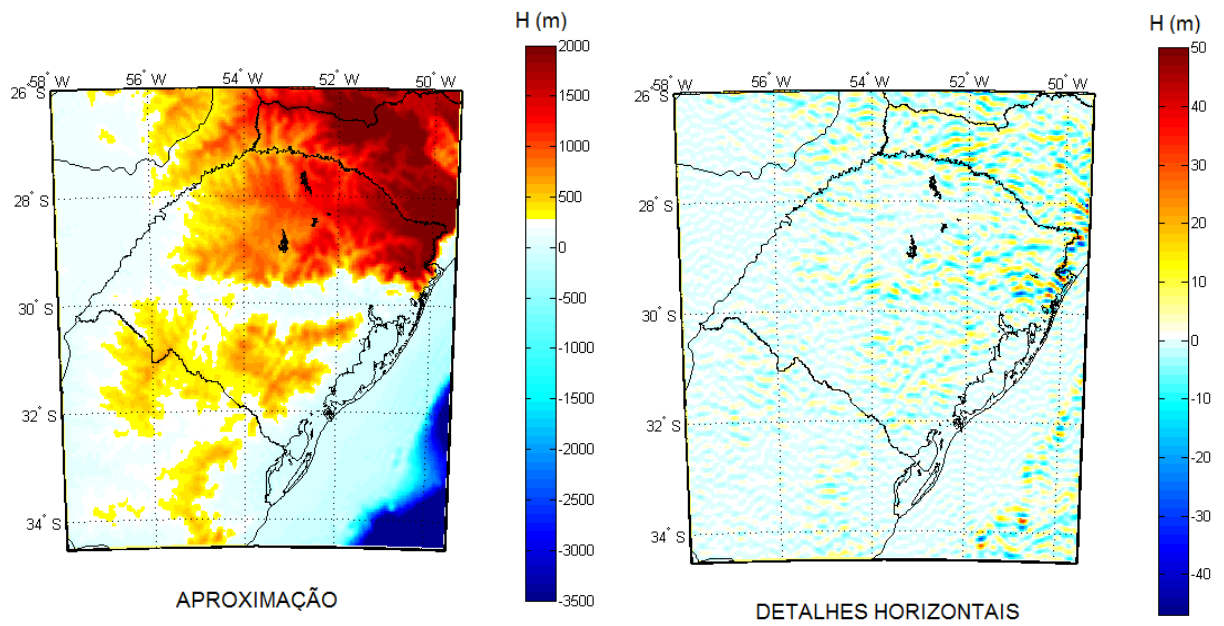
generating_institute	:	gfz-potsdam
generating_date	:	26/11/2012
product_type	:	Topography
body	:	Earth
modelname	:	etopo1
max_used_degree	:	2250
functional	:	topography_shm (from shm)
unit	:	Meter
refsysname	:	GRS80
radiusrefsys	:	6378137.000 m
flatrefsys	:	3.352810681183638E-03 (1/298.25722210088)
long_lat_unit	:	Degree
latlimit_north	:	-26
latlimit_south	:	-34.51666667
longlimit_west	:	302
longlimit_east	:	310.5166667
gridstep	:	1.67E-02
latitude_parallels	:	512
longitude_parallels	:	512
number_of_gridpoints	:	262144
gapvalue	:	99999
weighted_mean	:	1.4698419E+02 meter
maxvalue	:	1.6460850E+03 meter
minvalue	:	-3.5598117E+03 meter
signal_wrms	:	5.3296887E+02 meter
grid_format	:	long_lat_value

---

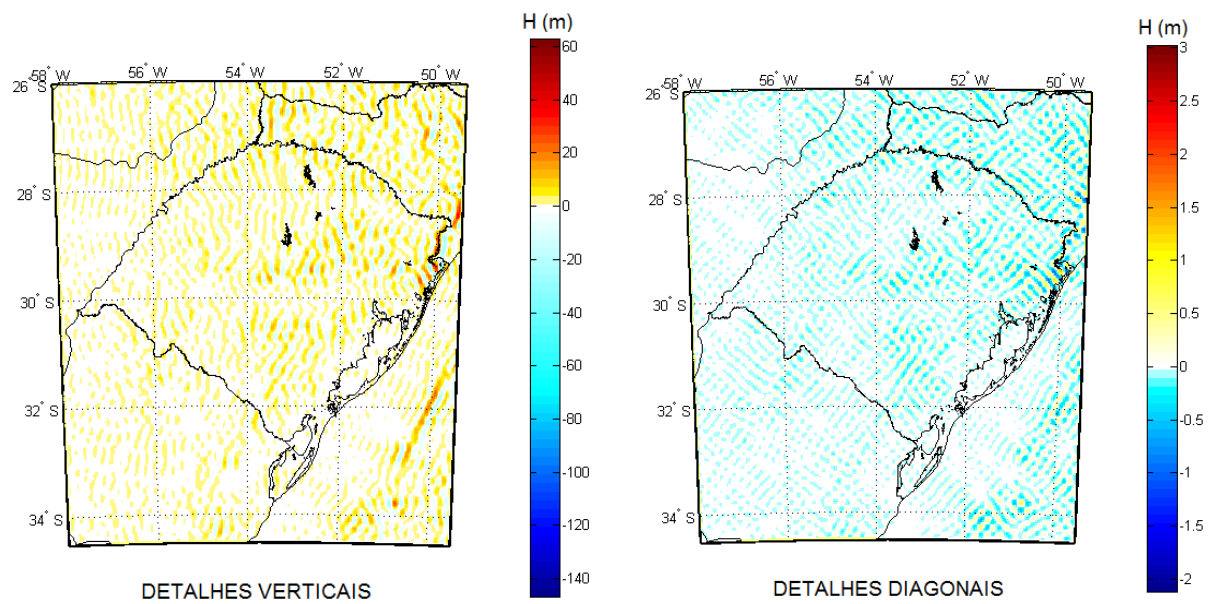
Na sequência, respectivamente, a representação da grade, a decomposição, a reconstrução e o resíduo da reconstrução nas figuras 28, 29, 30 e 31.



**Figura 28 - DEM ETOPO1**  
FONTE: O Autor.

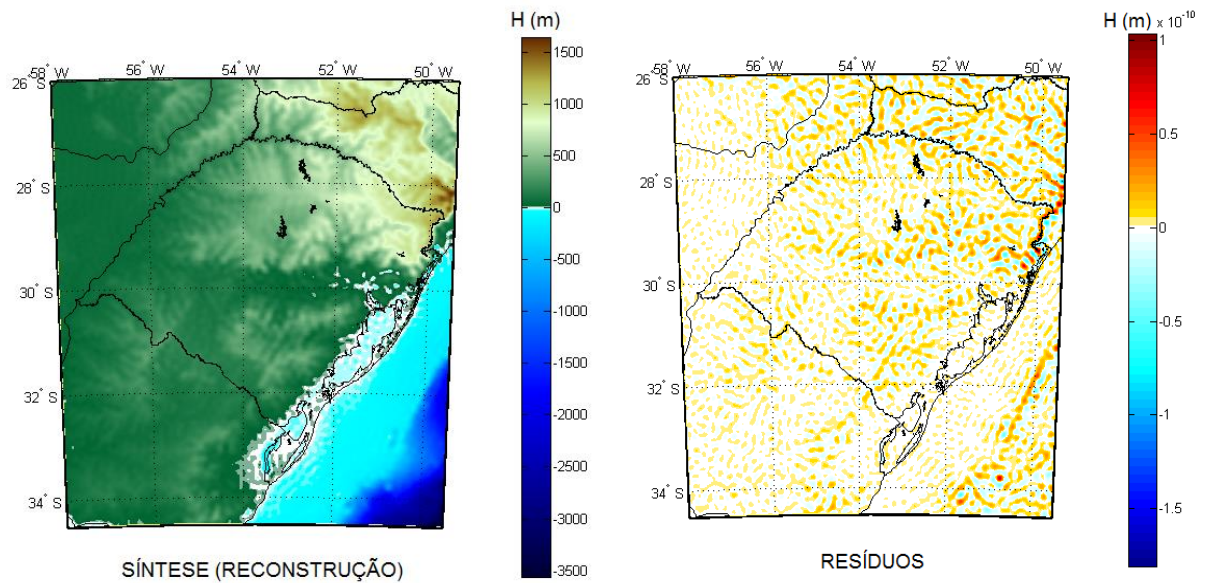


**Figura 29-** Decomposição do DEM ETOPO1 em *wavelets* de Daubechies. Aprox. e detalhes.  
 FONTE: O Autor.



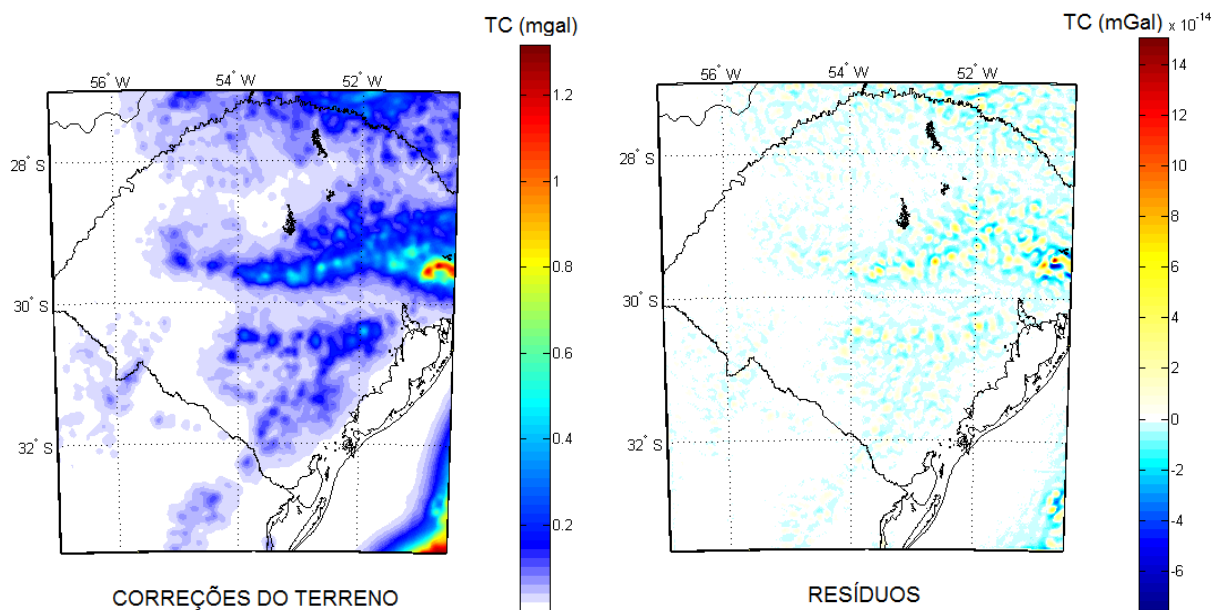
**Figura 30 -** Decomposição do DEM ETOPO1 a partir das *wavelets* de Daubechies. Detalhes.  
 FONTE: O Autor.





**Figura 31** - Reconstrução do DEM ETOPO1 a partir das *wavelets* de Daubechies.  
 FONTE: O Autor.

Apresentam-se agora os resultados equivalentes para Correções do Terreno. É importante salientar que estas quantidades foram obtidas utilizando-se o conjunto de rotinas *Gravsoft*, que, para esta aplicação, vale-se de equações baseadas em transformadas de Fourier, conforme referência do programa. As TC foram calculadas com raios de integração de 100 km. Após a eliminação referente a um grau nas bordas da grade, e em grades compostas de 392 linhas x 392 colunas, estes resultados são apresentados nas Figuras 32 e 33.



**Figura 32**- TC para o ETOPO1 e resíduos da sua reconstrução a partir das *wavelets* de Daubechies.  
 FONTE: O Autor.

Para o cálculo do efeito RTM, obteve-se uma grade similar àquela já utilizada para as altitudes. A diferença, sutil, está vinculada à sua obtenção, que vem do desenvolvimento em harmônicos esféricos: a nova grade é truncada no grau 360. O truncamento pode ser constatado no cabeçalho do arquivo gerado, apresentado abaixo:

Tabela 3 - Cabeçalho do arquivo de altitudes truncado no grau 360 gerado pelo ICGEM.

---

generating_institute	: gfk-potsdam
generating_date	: 03/12/2012
product_type	: topography
Body	: earth
Modelname	: etopo1
max_used_degree	: 360
Functional	: topography_shm (from shm)
Unit	: meter
Refsysname	: GRS80
Radiusrefsys	: 6378137.000 m
Flatrefsys	: 3.352810681183638E-03 (1/298.25722210088)
long_lat_unit	: degree
latlimit_north	: -26
latlimit_south	: -34.51666667
longlimit_west	: 302
longlimit_east	: 310.5166684
Gridstep	: 1.67E-02
latitude_parallels	: 512
longitude_parallels	: 512
number_of_gridpoints	: 262144
Gapvalue	: 99999
weighted_mean	: 1.4716006E+02 meter
Maxvalue	: 1.3043634E+03 meter
Minvalue	: -3.5014728E+03 meter
signal_wrms	: 5.2812736E+02 meter
grid_format	: long_lat_value

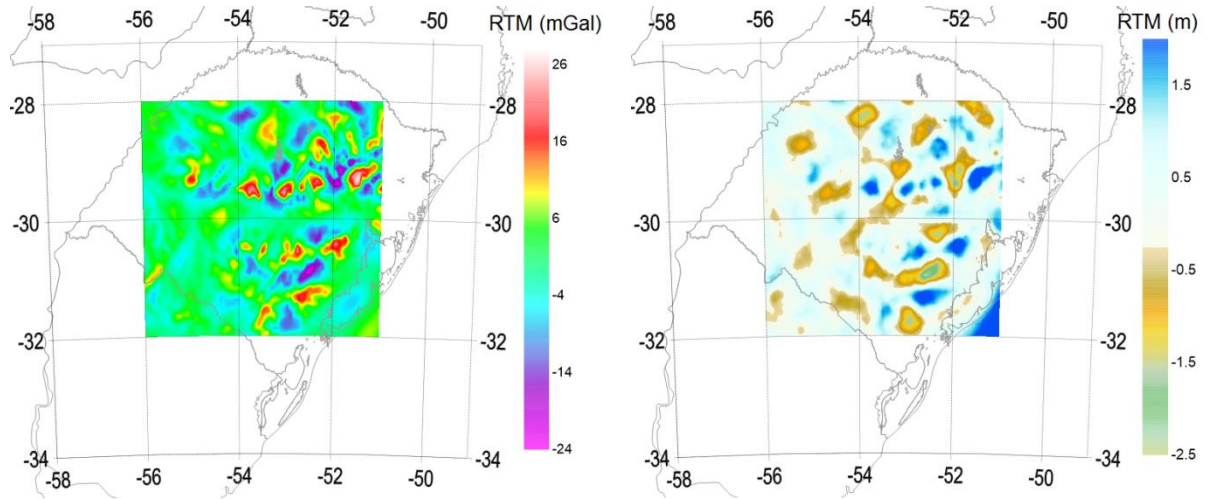
---

Também, devido a) à característica da ferramenta do gravsoft, b) à inconsistência quando aos problemas de escala na associação com a base cartográfica nas rotinas para *wavelets* e c) limitação do número de linhas e colunas no gravsoft, um recorte nas bordas maior foi necessário para a determinação do efeito RTM para o estado do Rio Grande do Sul. Na determinação do referido efeito, duas grades com características idênticas, exceto pelo seu grau de expansão, foram então obtidas e utilizadas nos cálculos. Na Figura 33, apresentam-se estes resultados respectivamente para distúrbios e anomalias de altitude, à direita e à esquerda, considerando-se raios de integração<sup>6</sup> para 100 km. Na Figura 34, têm-se somente os resíduos da reconstrução para *wavelets* de Daubechies para o efeito

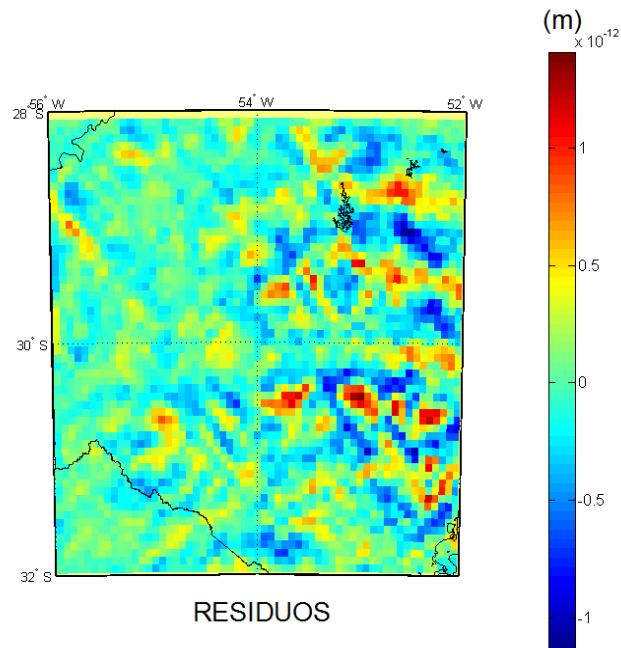
---

<sup>6</sup> O raio de integração se refere à quantidade  $l_0$ , definida na seção 4.4

RTM associado com anomalias de altitude, que, tal como os demais resíduos, resultaram praticamente nulos.



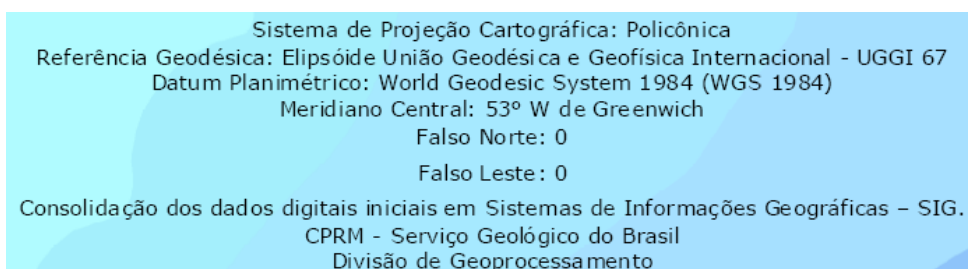
**Figura 33** - Efeito RTM para distúrbios da gravidade (à esquerda) e anomalias de altitude (à direita).  
FONTE: O Autor.



**Figura 34** - Resíduos da reconstrução do RTM a partir de *wavelets* de *Daubechies*.  
FONTE: O Autor.

## 5.2. Associação de elementos de altitude com valores de densidade da crosta com os curtos comprimentos de onda do geopotencial

Na seção 4.4 apresentou-se a possibilidade de associação de dados de caracterização do terreno como possíveis indicadores de variação lateral de densidade. Ao utilizar os produtos da CPRM, no entanto, além dos já mencionados problemas operacionais nos produtos cartográficos, têm-se a dificuldade em reconhecer-se o SGR e o sistema projetivo utilizado na construção do material disponibilizado por aquela instituição. Um extrato das cartas da CPRM contendo estas informações duvidosas está apresentado na figura 35 e corrobora a utilização da matriz sintética de densidades gerada.



**Figura 35-** Caracterização dos elementos da Carta "Geodiversidade" disponibilizada pela CPRM. FONTE: Serviço Geológico do Brasil. Disponível em <<http://www.cprm.gov.br/>> Acesso em 03/02/2013.

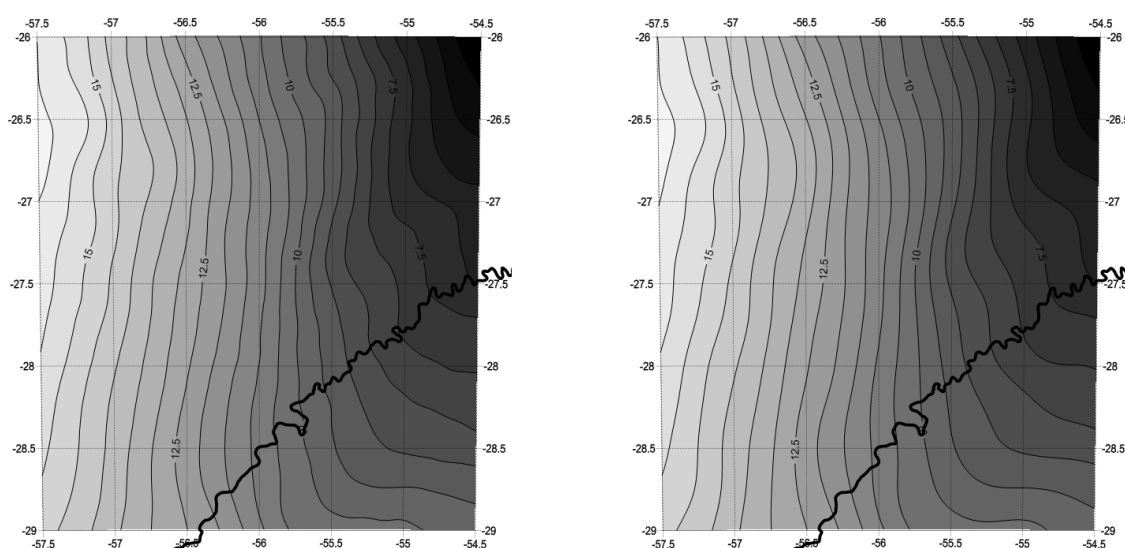
A inserção do modelo de densidades é um aspecto pertinente às análises desta pesquisa e até o momento não foi detectado qualquer conjunto de programas que atendessem tal necessidade. Deste modo, construíram-se rotinas para a geração de efeitos TC (Apêndice C) e RTM (Apêndice D). Entende-se que os aspectos técnicos envolvidos, embora metodológicos, fazem parte dos resultados e contribuem cientificamente para a continuidade dos estudos dos efeitos da densidade sobre os curtos comprimentos de onda do Geopotencial. Neste sentido ocorre a discussão a seguir.

Para os efeitos TC, substituiu-se o valor de densidade constante por uma rotina que buscava a densidade na matriz de densidades sintética gerada. Para um único ponto de cálculo, a cada ponto de avaliação a densidade era substituída no integrando da (4.2).

Para os efeitos RTM, todavia, a rotina construída apresentou-se instável. Acredita-se que tal instabilidade ocorre devido ao raciocínio empregado na sua

programação (Apêndice E) cuja avaliação final, aparentemente mais simplista, não corresponde à interpretação rigorosa da (4.3). Para inserir então as densidades sintéticas, obteve-se o efeito RTM a partir das rotinas disponibilizadas pela Escola do Geoide; dividiu-se todos os efeitos pelo valor de densidade constante ( $2,67 \text{ g/cm}^3$ ) e multiplicou-se, elemento a elemento, pela matriz de densidades obtida. Embora não rigoroso, este caminho poderia indicar uma análise mais pormenorizada para os efeitos RTM. Este raciocínio não se apresentou adequado para a região escolhida, como se pode perceber no próximo parágrafo.

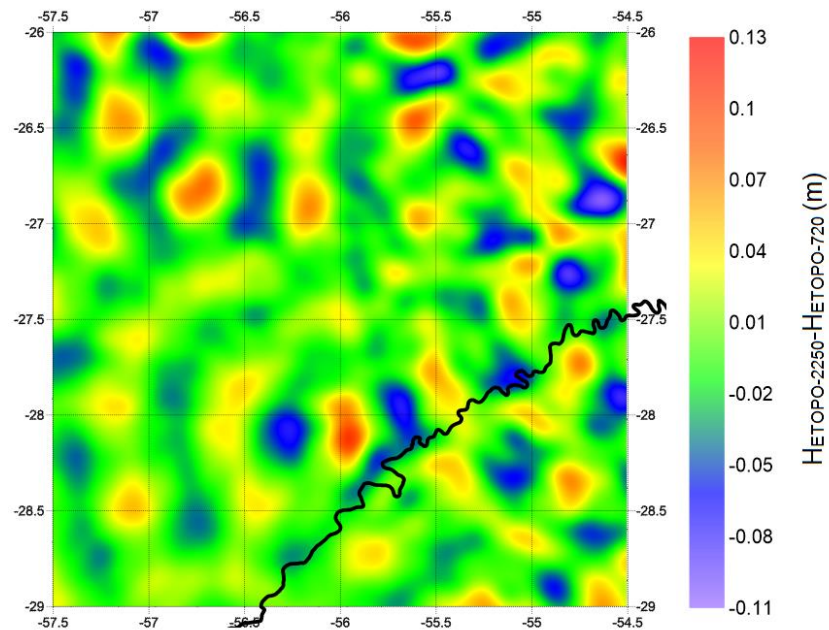
Na região de estudos A, utilizou-se o ETOPO1 expandido inicialmente até seu grau máximo, e, depois, até o grau 720 (ambos apresentados na Figura 36). Ainda que seja possível determinar a diferença entre os resultados para as duas expansões, como na Figura 36, o efeito RTM calculado para a região foi praticamente nulo, se considerada a expansão até o grau 720 como sendo a referência para o cálculo. Nesta região de estudos, pelos motivos ora expostos, não houve, então, como associar os elementos de densidade ao efeito RTM.



**Figura 36** - Modelo ETOPO1 expandido até o grau 2250, à esquerda, e até o grau 720, à direita. Unidades em metros.  
FONTE: O Autor.

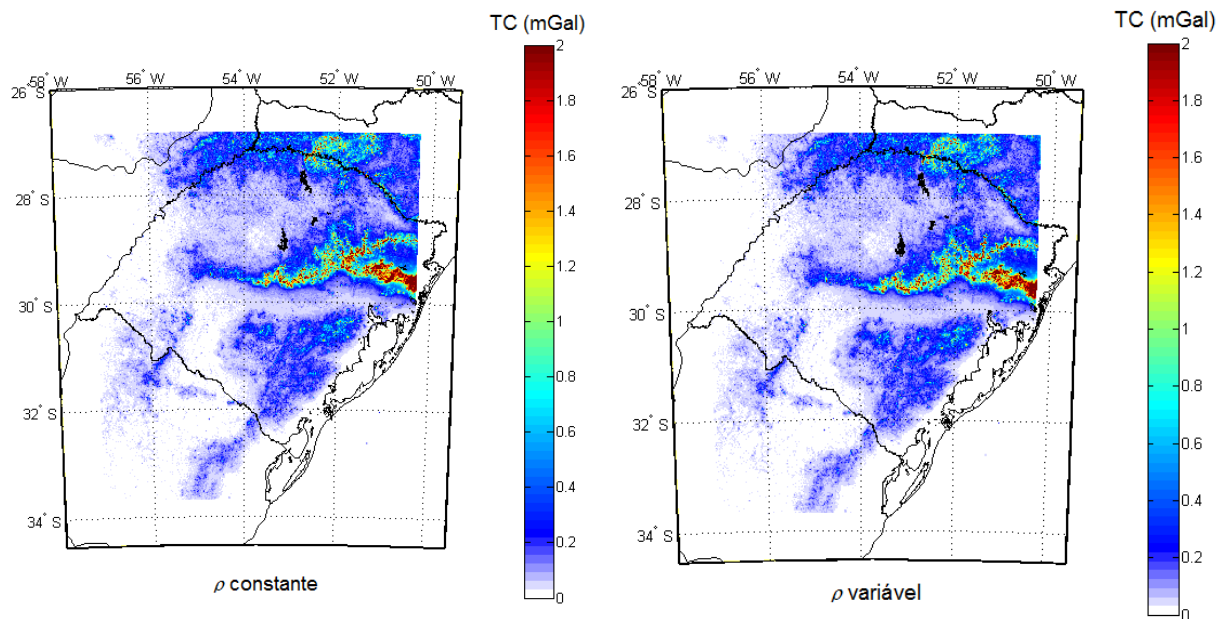
Com a Figura 37, a seguir, apresenta-se a diferença entre as grades apresentadas na Figura 36 (Desenvolvimento do Modelo Digital de Altitudes ETOPO1 até o grau 2250 menos o mesmo modelo desenvolvido até o grau 720). Esta representação

visa somente a apresentar as diferenças entre ambas as expansões e aponta os detalhes presentes no desenvolvimento dos graus de ordem superior.



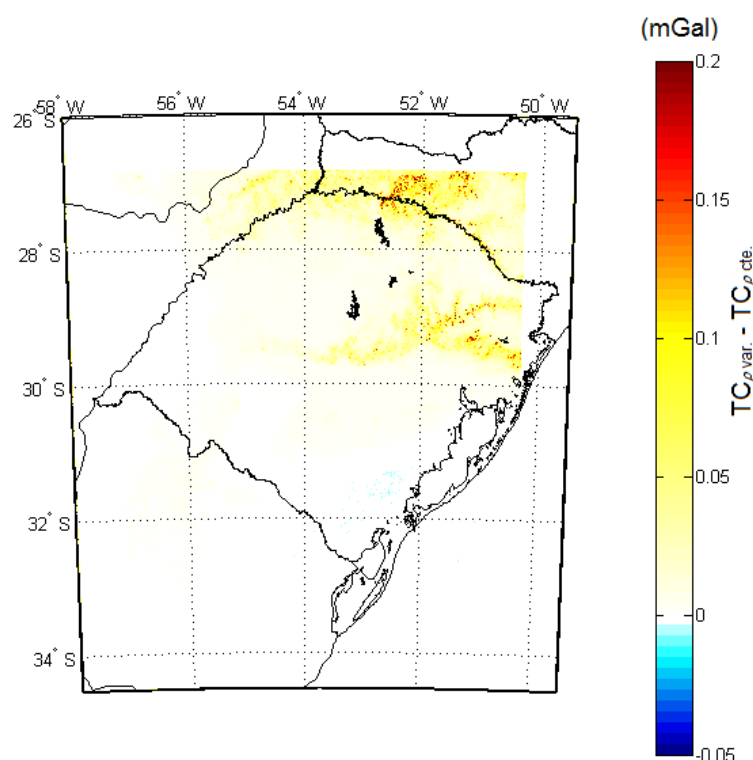
**Figura 37-** Diferenças entre um mesmo MDA segundo diferentes expansões.  
 FONTE: O Autor.

No caso das TC, em função da magnitude e da estabilidade da rotina desenvolvida, foi possível introduzir as variações de densidade oriundas do mapa de densidades sintético apresentado na seção 4.4 e conforme metodologia proposta. Os resultados são apresentados na Figura 38 e a diferença entre ambos na Figura 39.



**Figura 38-** Correções do Terreno.  
 FONTE: O Autor.





**Figura 39-**  $TC_{\rho} \text{ variável} - TC_{\rho} \text{ constante}$ .  
 FONTE: O Autor.

### 5.3. Compatibilização do potencial perturbador segundo um mesmo referencial visando à conexão das Redes Altimétricas Fundamentais do Brasil e da Argentina

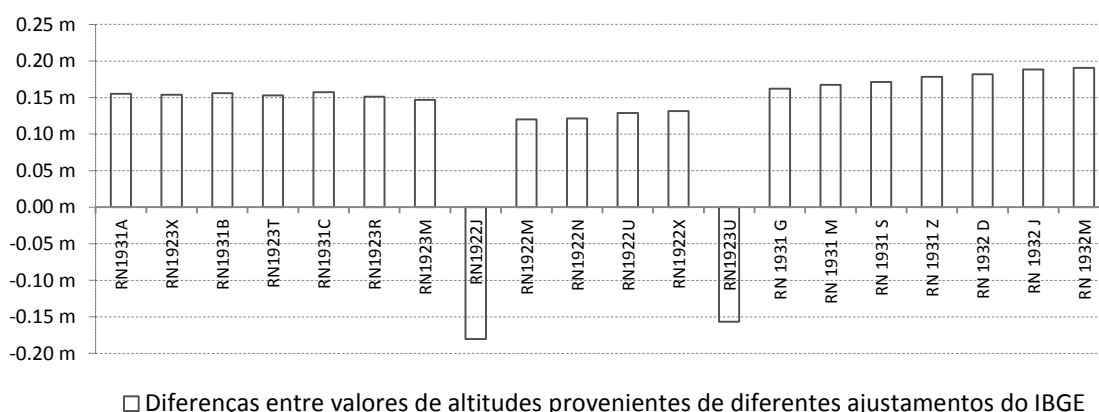
Em complemento à seção de Fontes de Dados, esta etapa da metodologia carece de alguns esclarecimentos adicionais para uma compatibilização entre sistemas de referência verticais. Neste momento convém destacar as três fontes de dados gravimétricos utilizadas:

- a) Observações gravimétricas disponibilizadas pelo Instituto Geográfico Nacional (IGN) da Argentina, às quais dispunham de coordenadas geodésicas curvilíneas e altitudes indicadas como sendo resultantes de nivelamento geométrico e referidas ao Datum Vertical Mar del Plata;
- b) Um conjunto de pontos obtidos por cooperação interinstitucional (UFPR/UNLP/IBGE/IGN), que resultou em dois circuitos fechados na região da fronteira do Brasil com a Argentina, com três conexões, a saber: Uruguaiana/Paso de Los Libres, Itaquí/Gal. Alvear e São Borja/Santo

Tomé. Nestas atividades, realizou-se gravimetria e posicionamento GNSS (L1/L2), sobre pontos que consistiam em referências de nível (RNs) no Brasil - as altitudes, provenientes de nivelamento geométrico, à época eram encontradas acessando-se ao Banco de Dados Geodésicos do IBGE (BDG-IBGE) referidas a sua realização mais atual - e alguns piquetes implantados - dos quais somente se observaram altitudes elipsoidais. Todas as altitudes conhecidas para estes pontos referiam-se ao Datum Vertical Imbituba (DVB-I) e a uma época anterior ao ajustamento da RAFB realizado pelo IBGE em 2011(AA2011);

- c) Um conjunto de pontos gravimétricos para o estado do Rio Grande do Sul, provenientes do BDG e cujas altitudes referem-se ao DVB-I e ao AA2011;

Inicialmente, convém apresentar algumas diferenças entre informações provenientes do BDG vinculadas ao AA2011 e ao Ajustamento Altimétrico Global Preliminar (AAGP), disponíveis em época anterior. Por exemplo, na Figura 40 diferenças simples entre as altitudes dos pontos fornecidas pelos dois ajustamentos são apresentadas. Ainda que a diferença ao longo da fronteira possa ser compreendida como constante, foi possível constatar diferenças bruscas de sinal envolvendo duas referências de nível da cidade de São Borja, que não puderam ser explicadas devido à impossibilidade de encontrarem-se mais RNs contendo dados do ajustamento mais antigo. Convém destacar que a RN 1923U constitui o único ramal que é utilizado na conexão São Borja/Santo Tomé. Em vista desta inversão de sinal, desconsiderou-se esta conexão para o cálculo de anomalias da gravidade, apresentado mais à frente.

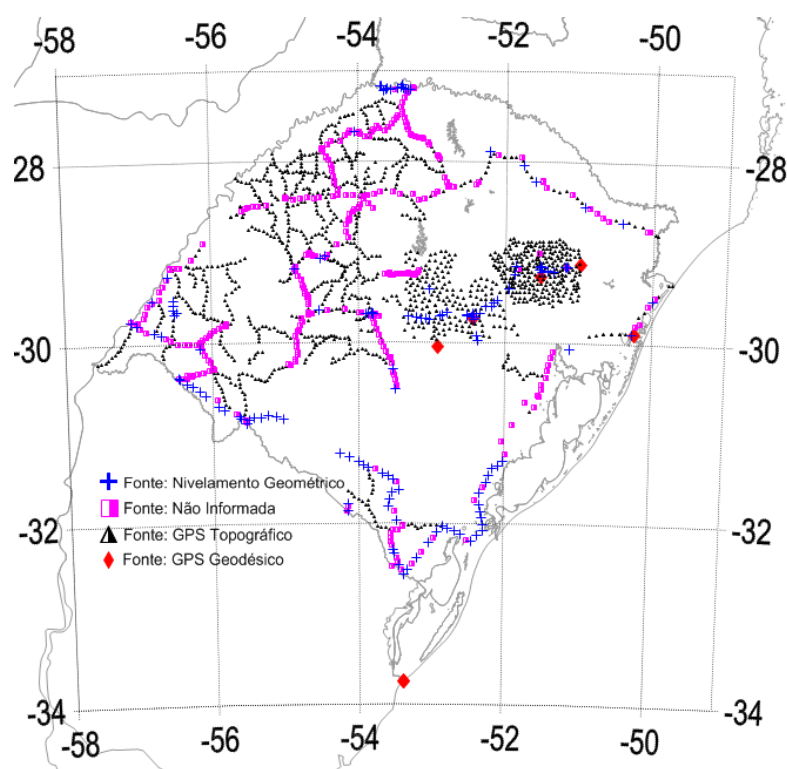


**Figura 40** -Diferenças de altitude sobre RNs: AAGP -AA2011. Unidades em m. FONTE: O Autor.

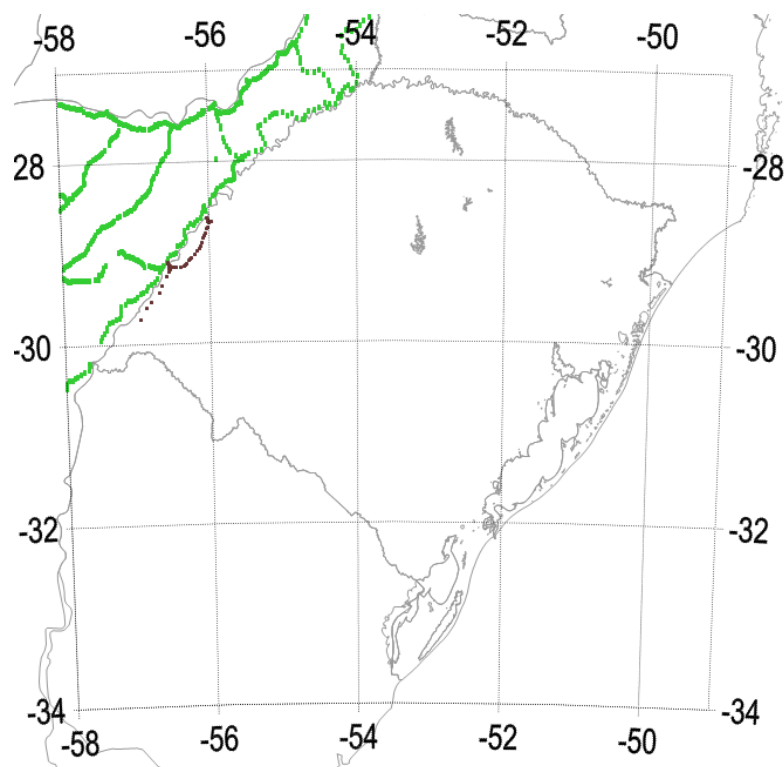


Para os dados descritos no item c), anteriormente, foram digitalizadas 1791 monografias de estações gravimétricas do BDG. As respectivas reduções para obtenção de anomalias da gravidade foram realizadas com base na altitude *ortométrica* fornecida nas monografias. Ressalte-se que em cada monografia há um campo "fonte" que parece estar relacionado com a fonte da altitude apresentada. Nestes campos, foi possível encontrar quatro diferentes respostas: "Nivelamento Geométrico", "Não Informada", "GPS topográfico" e "GPS Geodésico". Entende-se que as fontes "GPS topográfico" e "GPS geodésico" se referem à altitudes que foram obtidas da transformação de altitudes elipsoidais em ortométricas via um modelo global do geopotencial ou um modelo geoidal local regional. Na Figura 41, apresenta-se um esquema da distribuição destas estações segundo as suas fontes.

Na Figura 42 tem-se a situação das observações do item b), do lado brasileiro e, a), do lado argentino.



**Figura 41-** Estações gravimétricas disponíveis para o estado do Rio Grande do Sul no Banco de Dados Geodésicos do IBGE segundo as suas fontes.  
 FONTE: O Autor.

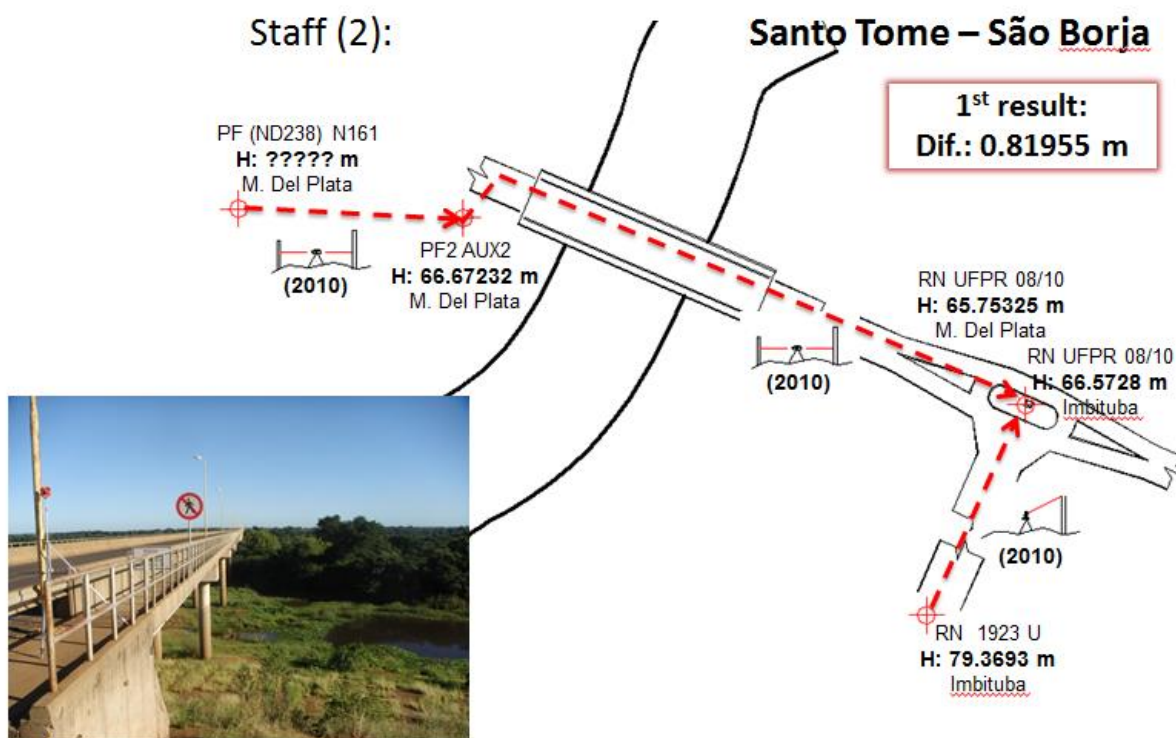


**Figura 42-** Estações Gravimétricas fornecidas pelo IGN (Argentina) e Novas Estações Gravimétricas materializadas pelo IBGE-UFPR.  
 FONTE: O Autor.

Os conjuntos de dados indicados nos itens a) e b) tiveram suas altitudes atualizadas visando-se manter a realização mais atual disponibilizada pelo BDG. Esta decisão levou em conta o número muito maior de estações gravimétricas do terceiro conjunto relativamente aos outros dois, além de constituírem-se em fonte de informação mais atualizada. Tal atualização considerou principalmente o AA2011 e aspectos relacionados às três conexões internacionais realizadas e detalhadas a seguir. Este detalhamento visa explicar as razões para a escolha do desnível adicionado às altitudes das estações gravimétricas do lado Argentino.

- I - Todas as altitudes que conduziam às conexões são baseadas em valores de altitudes provenientes de RNs, cujas monografias estão disponíveis no BDG e, por consequência, associadas ao ajustamento então realizado. Infelizmente, todas as conexões foram construídas num período anterior ao ajustamento de 2011, e por isso necessitaram de atualização. Neste caso, convém lembrar alguns resultados apresentados na reunião

SIRGAS de 2010 (FREITAS et Al.,2010). Primeiramente, com relação à conexão São Borja/Santo Tomé, têm-se (Figura 43):



**Figura 43** - Conexão São Borja/Santo Tomé. Situação de 2010. FONTE: Freitas et Al., 2010.

Na Figura 43, apresenta-se o ramal da RN1923U até a RN UFPR 08/10, construído com base em nivelamento trigonométrico. Do lado argentino, outro ramal, partindo-se do ponto PF(ND238) N161 chegou-se também à RN UFPR 08/10. À época, era possível concluir que a Rede Vertical Fundamental Argentina (RVFA) estava 0,81955 m abaixo da brasileira (RVFB). Em vista da técnica empregada, com o apoio da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA) e alocação de recursos do CNPq, decidiu-se por refazer o ramal do lado brasileiro onde o desnível inicialmente obtido de -12,7965 m obtido por nivelamento trigonométrico (com equipamento de 3" de precisão angular) foi confirmado pelo valor de -12,79261 m obtido por nivelamento geométrico (realizado com nível eletrônico com precisão melhor que 1mm (K)<sup>(1/2)</sup>), e publicado na Reunião Sirgas de Concepción, em 2012 (Pereira et Al, 2012). Nesta operação, o valor de -12,79261 m foi obtido exclusivamente do nivelamento, uma vez que o desnível obtido de contra-nivelamento, igual a -12,81531 m foi

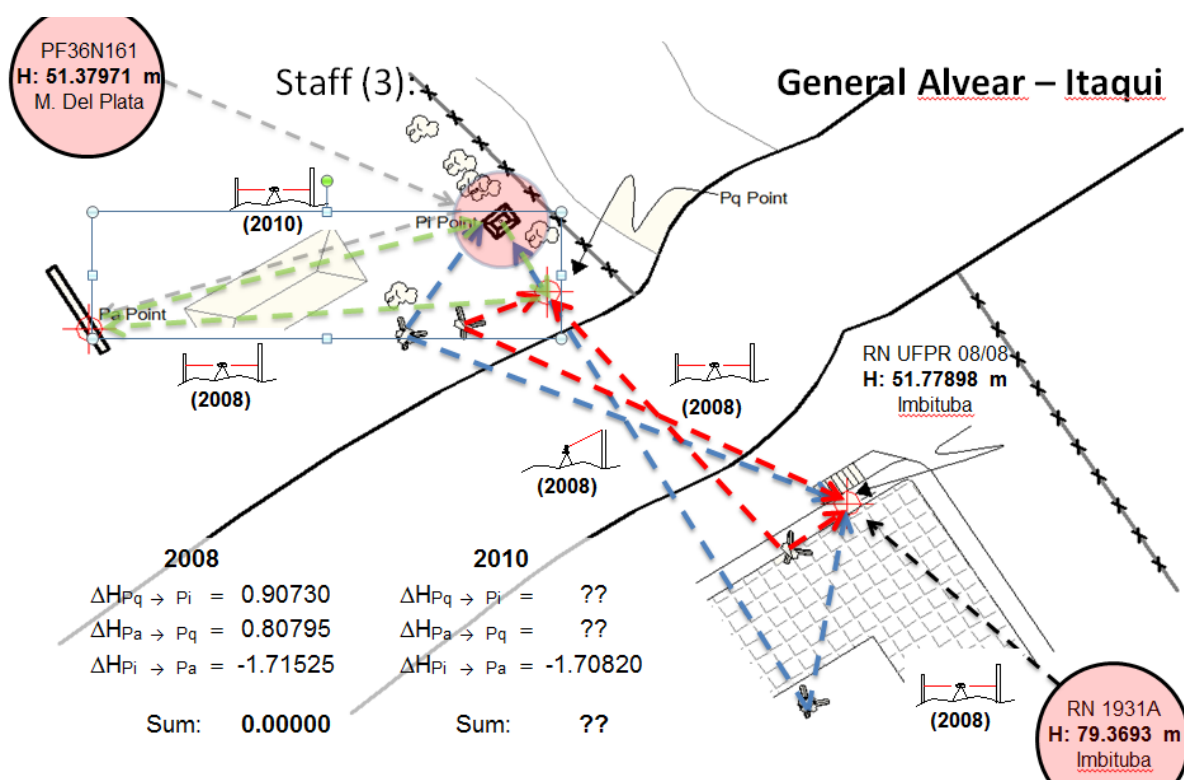
resultado de uma operação iniciada após às 15h e, com dificuldades de finalização da atividade;

Com o ajustamento de 2011, a altitude da RN 1923 U passa a ser 79,5261 m, conduzindo ao valor de 66,7334 m para a RN UFPR 08/10. Tal fato implica dizer que a RAFA está, segundo os novos dados, 0,9802 m abaixo da RAFB quando considerada esta conexão. É importante mencionar que este resultado não concorda com as outras duas conexões, apresentadas em seguida.

II - Na conexão Itaquí/Gal. Alvear, o cenário é descrito pela Figura 44, onde é possível perceber que a RN utilizada na conexão é a RN 1931A, de onde originou-se o nivelamento até a RN UFPR 08/08, cuja altitude, de acordo com o novo ajustamento, corresponde a 58,4215 m. Cabe lembrar que anteriormente tinha-se este mesmo ponto como H (RN UFPR 08/08<sub>1931A-AAGP</sub>)=51,77898, sendo (RN 1931A<sub>AAGP</sub>)=58,5766. É importante destacar esta informação devido ao erro de grafia existente na Figura 44 e suas fontes. Este erro ocorreu devido à importação dos formatos da Figura 43 (e suas fontes) que apresentavam  $H_{RN\ 1923U-AAGP} = 79,3693$  m. A partir da RN UFPR 08/08 foram feitas duas conexões: uma por nivelamento trigonométrico e outra por nivelamento geométrico de travessia (*River Crossing Levelling*). Na primeira, empregou-se um instrumento com precisão nominal de 5" e, na segunda, nível mecânico de linha com padrões requeridos para realização de nivelamento geométrico convencional de 1.ª ordem (IBGE, 1982). A conexão realizada com nivelamento trigonométrico resulta em uma diferença de -0,54572 m quando se faz  $H(PILAR)_{MAR\ DEL\ PLATA} - H(PILAR)_{IMBITUBA}$ . PILAR é o ponto "Pi Point" apresentado na Figura 44, para onde convergem as linhas pontilhadas em azul. Para o nivelamento geométrico de travessia, encontra-se  $H(Piquete)_{MAR\ DEL\ PLATA} - H(Piquete)_{IMBITUBA} = -0,57281$ . O ponto Piquete está indicado na figura 44 como "Pq Point". Anteriormente ao ajustamento de 2011, tinha-se respectivamente -0,7008 e -0,7279 m para estas duas metodologias.

Entende-se que estas diferentes avaliações estão associadas às diferentes técnicas empregadas e às diferentes épocas de avaliação dos desníveis. Além disso, deve-se levar em conta também características do

ponto Pa ("Pa Point") até o qual chegou o nivelamento que partiu do ponto PF36N161. O ponto Pa é constituído por uma seção de barra de aço aparente numa Parede em concreto armado, não verticalizada, que pode ser abalada quando sofre sobrecarga. Isto pode ter acontecido durante alguma operação de nivelamento, resultando nas diferenças enumeradas. Além disso, o desnível desde o ponto PF36N161 até o Ponto PI, base para a conexão, foi determinado em 2010, enquanto os desníveis entre os pontos Pa e Pq foram determinados em 2008. Infelizmente, é necessário destacar, que em 2008 não se constituiu uma rede para verificar o erro de fechamento deste pequeno circuito. Assim, para determinar o desnível Pi-Pq considerou-se o somatório dos desníveis totais como sendo iguais a zero, uma vez que, em campo, o Ponto Pq não existia mais e, assim, realizou-se a comparação entre as técnicas.



**Figura 44** - Conexão Itaquí/Gal. Alvear. Situação de 2010.  
FONTE: Freitas et Al. (2010).

III - A conexão Uruguaiana/Paso de Los Libres foi realizada comparando-se altitudes referidas a ambos data verticais na estação PFA 1XA, situada em Paso de Los Libres. Do Brasil, partiu-se da RN 9025 C(B2), cuja

altitude de acordo com o AAGP era 60,61840 m, resultando para a RN de conexão, a RN UFPR 08/05, uma altitude de 58,16407 m. Com o ajustamento de 2011, a altitude da RN 9025 C(B2) passou a ser 60,42540. que resulta numa altitude de 57,97107 m para a RN UFPR 08/05.

Da RN UFPR 08/05, chegou-se à estação PFA 1XA, a qual, referida ao AAGP, apresenta uma altitude de 55,91642 m. Se considerado o Ajustamento de 2011, tem-se  $H(PFA\ 1XA) = 55,72342$  m. Portanto, quando  $H(PFA\ 1XA)_{MAR\ DEL\ PLATA} = 55,1954$  m, têm-se desníveis de -0,72102 m e -0,52802 m referidos ao AAGP e ao ajustamento de 2011, respectivamente.

Pode-se parametrizar todas estas diferenças em função dos dois ajustamentos da RAFB, tendo-se como resultado o Quadro 4, a seguir

**Quadro 4** - Diferenças nas conexões realizadas em função dos Ajustamentos de 2011 e AAGP.  
FONTE: O Autor.

Conexão	Desnível entre as Redes (Argentina menos Brasil) (m) Aj.2011	Desnível entre as Redes (Argentina menos Brasil) (m) AAGP
São Borja/Santo Tomé	-0,9802	-0,8195
Itaqui/Gal. Alvear (Trigonométrico)	-0,5457	-0,7008
Itaqui/Gal. Alvear (G. de Travessia)	-0,5728	-0,7279
Uruguiana/P. de Los Libres	-0,5280	-0.7210

No Quadro 4 fica evidente a discordância da Conexão São Borja/Santo Tomé com as demais. Assim, nas reduções gravimétricas empregou-se o valor de -0,5483 m, média simples dos outros três números, como sendo representativo do desnível entre as RVFA e RVFB.

Também permanecem questões em aberto relacionadas com a gravimetria. Na cidade de Itaqui, por exemplo, redundantes observações gravimétricas foram realizadas sobre a RN 1931A a partir de pontos do Observatório Nacional (ON) em São Borja e do lado argentino. Estas diferenças chegaram a até 0,50 mGal e foram encontradas em diferentes épocas de observação, todavia, com diferentes instrumentos. Posteriormente, descobriu-se que a RN 1931A era uma estação gravimétrica do ON e, o seu valor aproximadamente coincidente com uma das observações. Entende-se que a questão gravimétrica merece atenção especial,

considerando-se que Rede Fundamental Gravimétrica é relativamente antiga e hoje constitui forte arcabouço para a modelagem.

Neste mesmo sentido, deve ser destacado que a estação de referência do ON em São Borja utilizada como referência para a densificação dos pontos constituídos pela UFPR/IBGE na linha até Itaqui, apresentou certa instabilidade nos níveis do instrumento durante a observação, provavelmente devido a algum recalque diferencial no local onde se encontrava a chapa de referência. Operadores fizeram este relato ao aproximarem-se do ponto que fica na soleira de uma Igreja daquela cidade. Todavia, estes relatos só foram percebidos com o instrumento Lacoste & Romberg G372 da UFPR. O mesmo cenário não se apresentou em observações de uma época anterior realizadas com um Scintrex CG3. Assim, uma série de dúvidas podem ser enumeradas além da, naturalmente, possibilidade do marco ter sido destruído à posteriori. Não se atribui muito valor à esta última hipótese devido ao aparente bom estado de conservação do local.

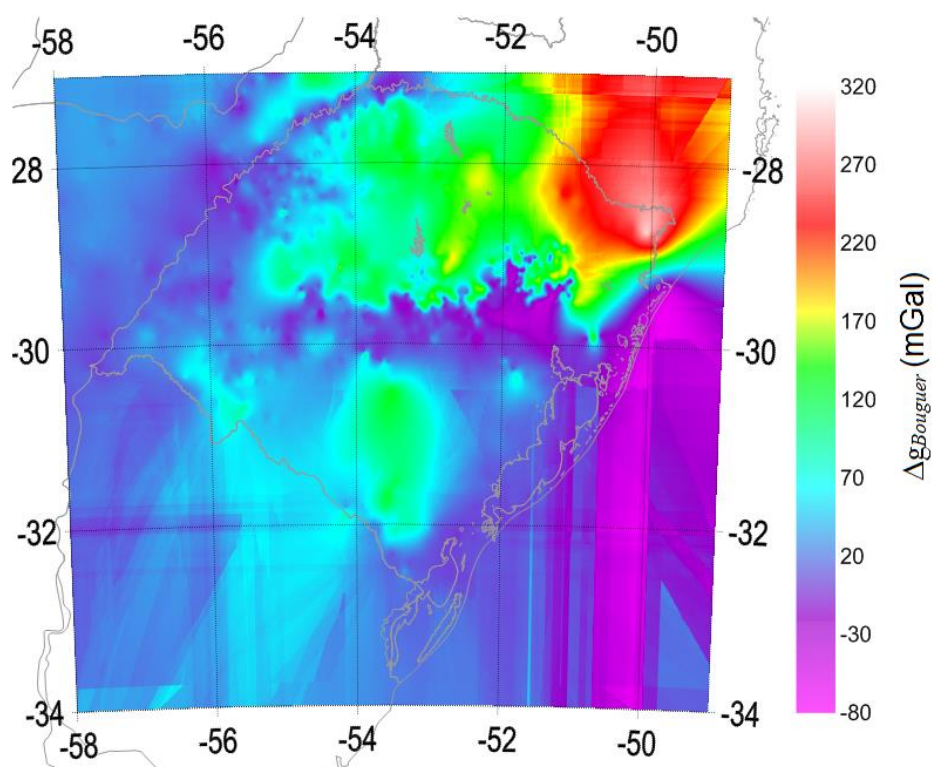
Além disso, a referida diferença de 0,5 mGal apontada se refere a um ponto cuja gravidade foi observada exatamente nas mesmas condições, ou seja: partiu-se do ponto ON em São Borja e observou o ponto em Itaqui, com os devidos fechamentos de circuito realizados. Então, dadas estas considerações, uma nova rede gravimétrica naquela região também ajudaria a solucionar muitas destas diversas dúvidas apontadas sobre a conexão São Borja/Santo Tomé.

#### **5.4. Análise do potencial perturbador segundo um mesmo referencial visando-se à reconstrução do sinal geopotencial a partir de *wavelets***

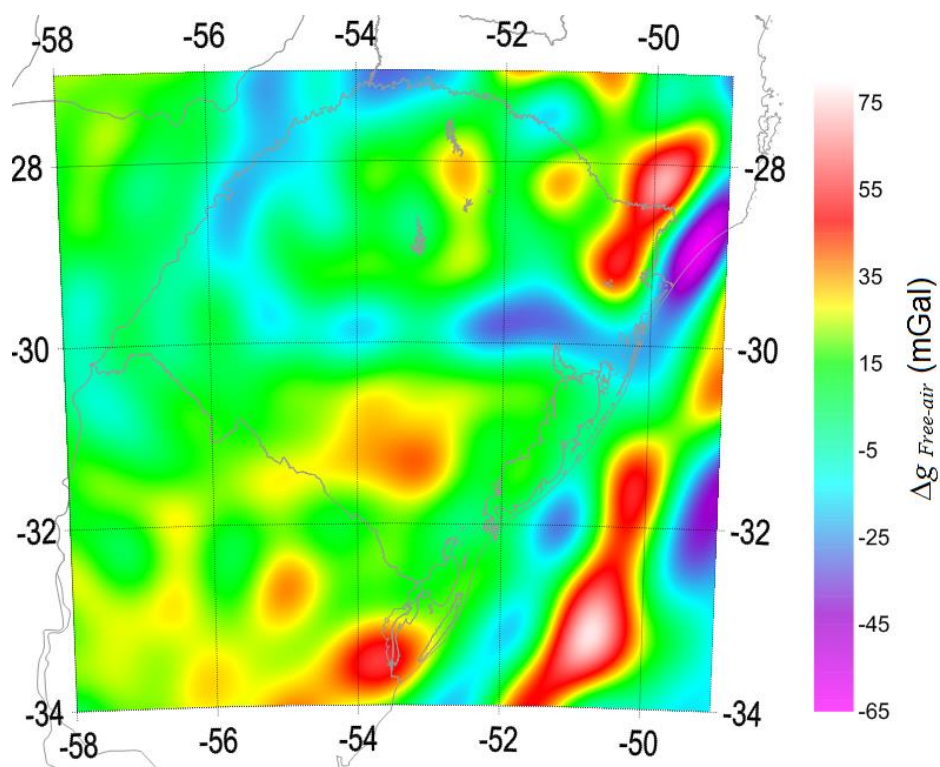
Na Figura 45 apresenta-se  $\Delta g_{Bouguer}$  obtidas dos pontos apresentados nas Figuras 41 e 42, interpoladas por krigagem, e referidas ao DVB-Imbituba, calculadas segundo a teoria clássica. Na Figura 46,  $\Delta g_{Free-air}$  obtidas do EGM2008, dentro da mesma concepção teórica são apresentadas. Da subtração entre a (2.5) e a (2.4) e isolando-se para a  $\Delta g_{Free-Air}$ , tem-se a Figura 47. Nesta conversão, utilizou-se o ETOPO1. Após esta etapa, via a (2.6), obteve-se  $\Delta g_{Free-Air}$  residuais (Figura 48).

As  $\Delta g_{Free-Air}$  residuais em conjunto com as anomalias da gravidade oriundas de um MGG irão compor a etapa *restore* e o resultado desta etapa, a partir das mesmas quantidades, servirá de referência para a recomposição *wavelet*.



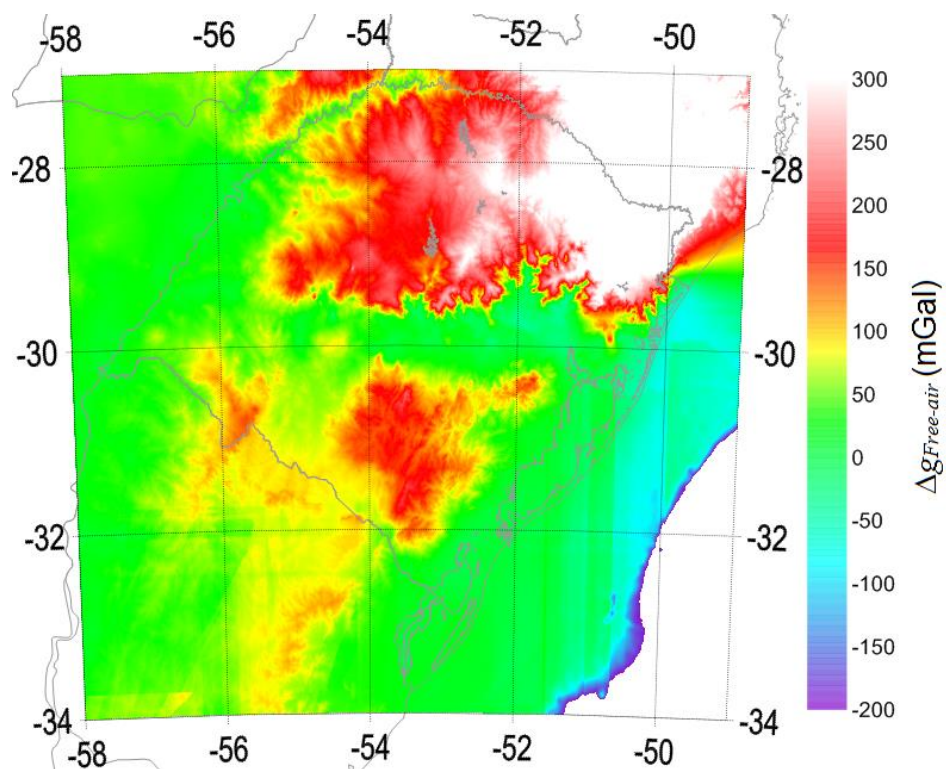


**Figura 45** – Anomalias Bouguer segundo a teoria clássica.  
FONTE: O Autor.

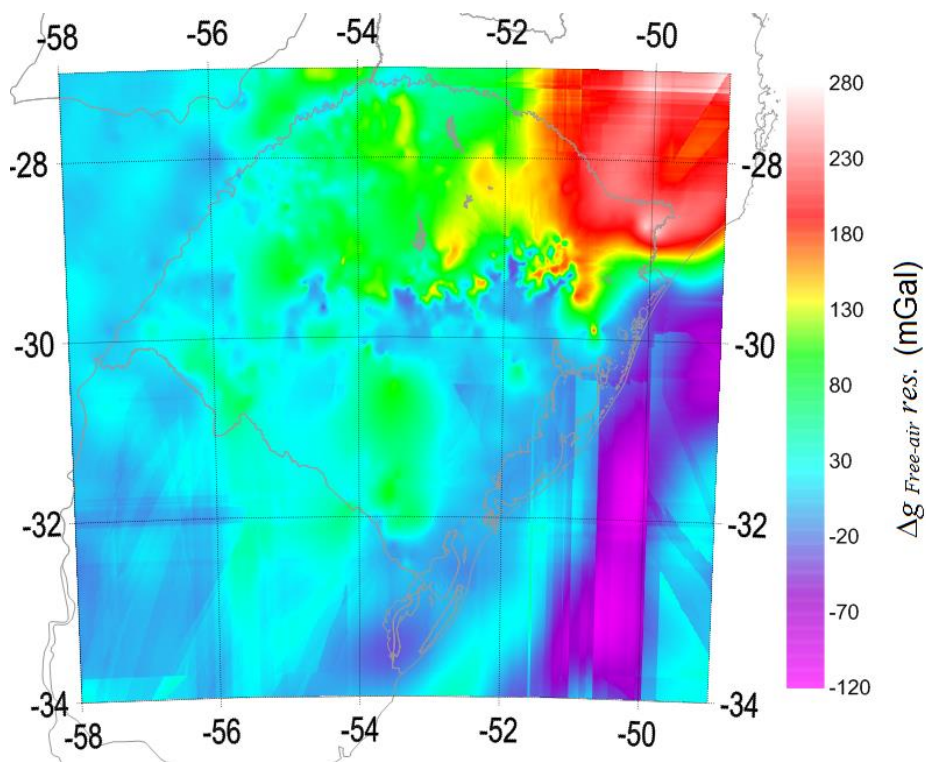


**Figura 46** - Anomalias *Free-Air* segundo a T. clássica obtidas do EGM2008 truncado no grau 360.  
FONTE: O Autor.





**Figura 47** - Anomalias da Gravidade *Free-Air* obtidas da manipulação das Anomalias da Gravidade Bouguer e o ETOPO1.  
 FONTE: O Autor.

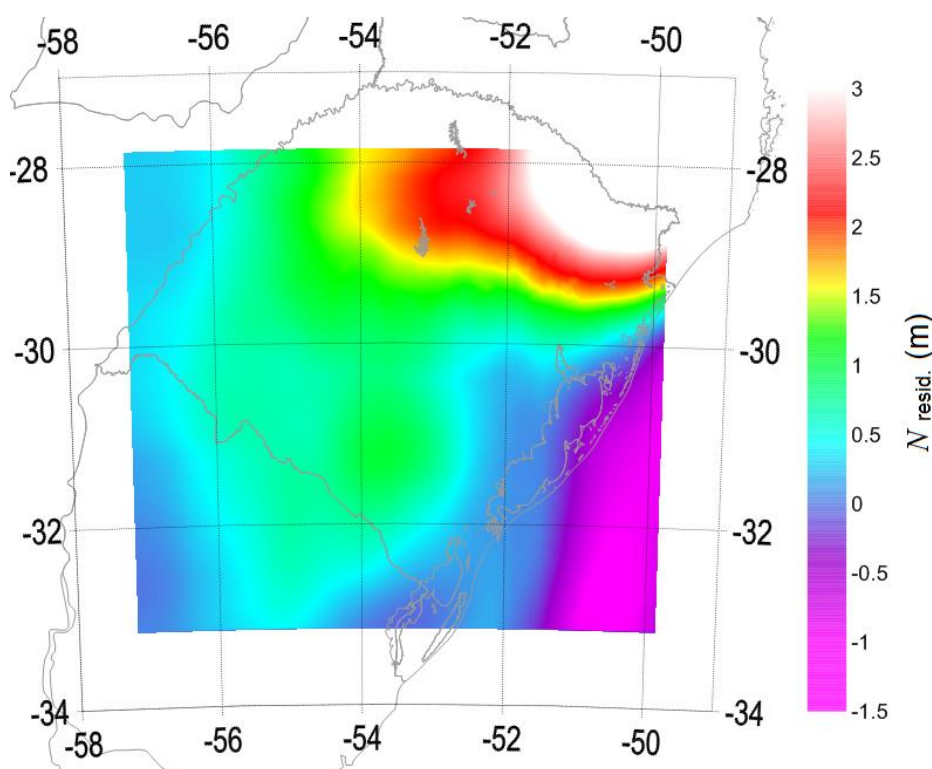


**Figura 48** - Anomalias da Gravidade *Free-Air* residuais.  
 FONTE: O Autor.

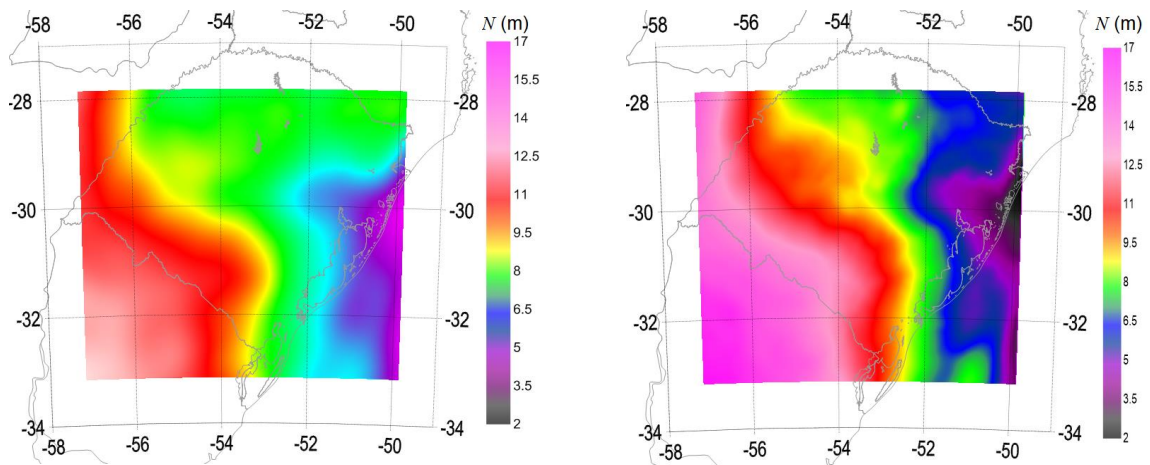
### 5.5. Reconstrução do sinal geopotencial completo por *wavelets*

Da integração da grade de Anomalias da Gravidade residuais, via a (2.1), obteve-se uma grade de alturas geoidais residuais. O programa desenvolvido para este cálculo encontra-se apresentado no Apêndice F. Desta grade, extraiu-se os contornos de modo a minimizar os efeitos de borda. Este resultado está apresentado na Figura 49. A grade apresentada na Figura 49 foi somada com uma grade de alturas geoidais provenientes do EGM2008 truncado no grau 360, resultando no cogeioide para o estado do Rio Grande do sul, na Figura 50, à Esquerda. Para uma comparação visual, à direita apresenta-se o geoide para a mesma região obtido do EGM2008 desenvolvido até o seu grau e ordem máximos.

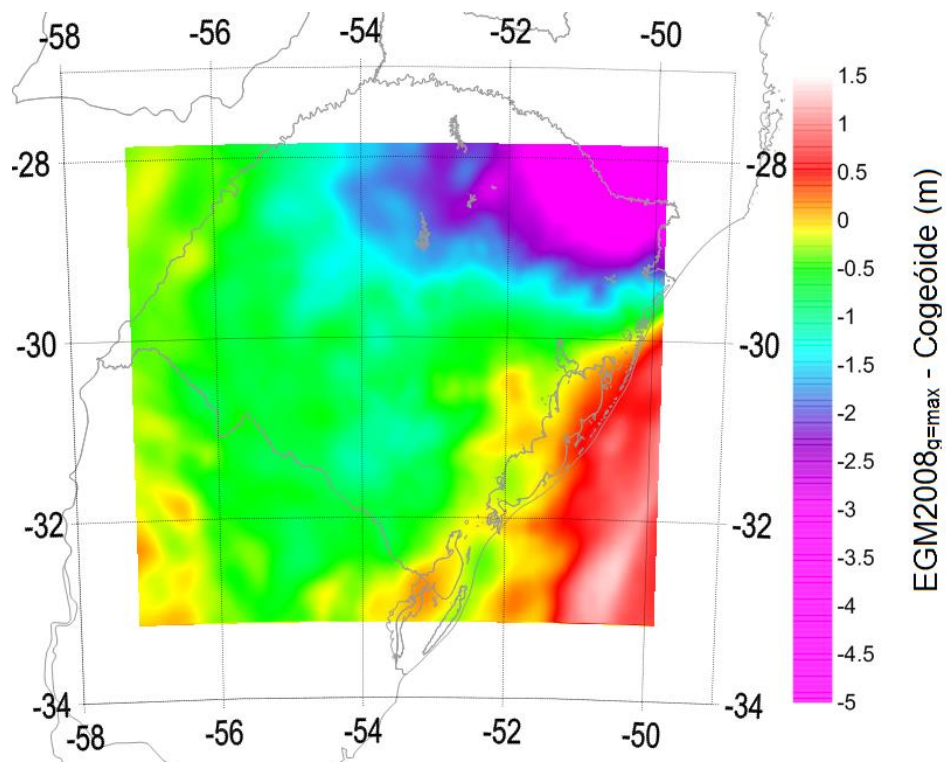
As diferenças entre as grades (Figura 51) chegam a um mínimo de -4,690 m e um máximo de 1,331 m. A diferença média, de -0,735 m (com RMS=1,250 m) é afetada pelo vazio da serra gaúcha, onde se percebe somente uma linha de observações gravimétricas e ainda pelo Oceano Atlântico, onde não há observações. Esta diferença, no entanto, é atenuada quando se discretiza a Região de Estudos, como será apresentado na seção 5.9.



**Figura 49** - Alturas geoidais residuais. Unidades em metros.  
FONTE: O Autor.



**Figura 50** - Cogeioide (Esquerda) e Geoide -EGM2008<sub>GrauMáx.</sub> (Direita) para o estado do Rio Grande do Sul.  
 FONTE: O Autor.



**Figura 51** - EGM2008 desenvolvido até o grau máximo menos cogeioide calculado.  
 FONTE: O Autor.

Posto estas quantidades, é possível proceder à recomposição a partir de *wavelets*. O procedimento, sumarizado aqui e detalhado na seção referente à metodologia, foi o seguinte:

- a) Obtenção da transformada *wavelet* em duas dimensões da grade de alturas geoidais provenientes do EGM2008 desenvolvido até o grau 360;

- b) Obtenção da transformada *wavelet* em duas dimensões da grade de alturas geoidais residuais provenientes da grade de anomalias da gravidade *free-air* residuais;
- c) Dos coeficientes das transformadas *wavelet* anteriores (etapas a) e b)), conservaram-se os coeficientes de *aproximação* da etapa a) e os coeficientes de *detalhe* da etapa b). Foram dispensadas as demais matrizes de dados;
- d) De posse dos coeficientes de *aproximação* e *detalhe*, procedeu-se à transformada inversa dos dados.

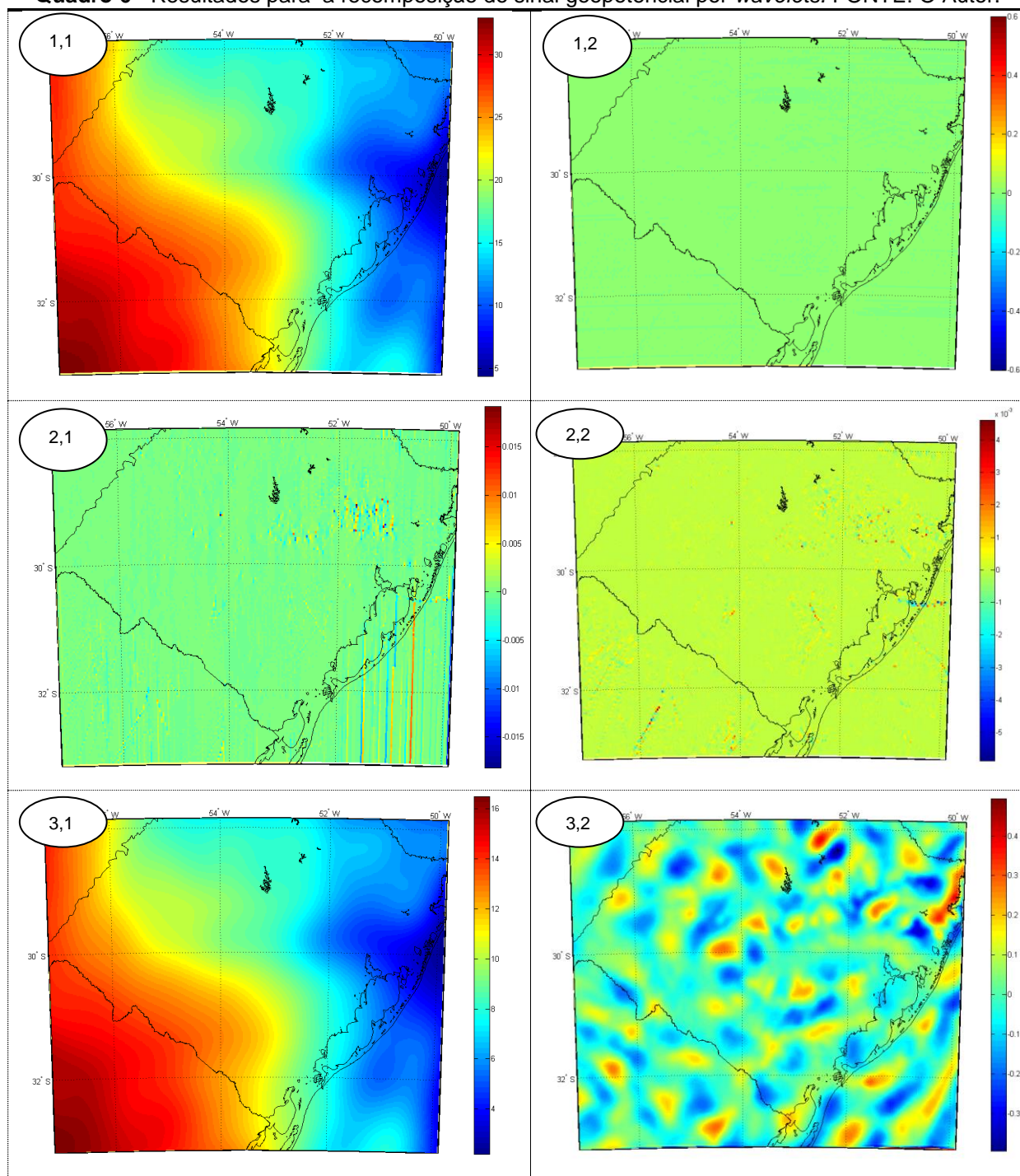
Para a transformação entre domínios, foi utilizada uma *wavelet* do tipo *biortogonal* 2.4 e os resultados podem ser visualizados segundo a interpretação e visualização dos Quadro 5 e 6, a seguir:

**Quadro 5** - Descrição dos resultados da reconstrução do sinal Geopotencial por *wavelets*.  
FONTE: O Autor.

I	Linha 1, Coluna 1: Matriz de <i>aproximação</i> proveniente da transformada <i>wavelet</i> 2D das alturas geoidais provenientes do EGM2008 truncado no grau 360;
II	Linha 1, Coluna 2: Matriz de <i>Detalhes</i> Horizontais provenientes da transformada <i>wavelet</i> 2d das alturas geoidais residuais;
III	Linha 2, Coluna 1: Matriz de <i>Detalhes</i> Verticais provenientes da transformada <i>wavelet</i> 2d das alturas geoidais residuais;
IV	Linha 2, Coluna 2: Matriz de <i>Detalhes</i> Diagonais provenientes da transformada <i>wavelet</i> 2d das alturas geoidais residuais;
V	Linha 3, Coluna 1: Matriz final de dados reconstruída a partir das já referidas matrizes de <i>aproximação</i> e <i>detalhe</i> . A reconstrução foi efetivada via uma transformada <i>wavelet</i> 2d inversa do tipo biortogonal;
VI	Linha 3, Coluna 2: Matriz de diferenças: EGM2008 desenvolvido até o grau máximo menos a matriz reconstruída a partir da <i>wavelet</i> 2D inversa.

É importante destacar que a média da última matriz citada na linha VI resultou  $-3,909 \cdot 10^{-5}$  m, com RMS de 0,0979 m. Todas as unidades apresentadas nesta seção estão em metros.



**Quadro 6** - Resultados para a recomposição do sinal geopotencial por *wavelets*. FONTE: O Autor.

A interpretação do quadro 6 deve ser a que segue: dois conjuntos de informações contêm os curtos comprimentos de onda: a) a grade do EGM2008 desenvolvido até o grau máximo e b) a grade obtida da fusão por *wavelets* das informações locais com o EGM2008 truncado no grau 360. Um indício de que a fusão por *wavelets* foi eficiente é a subtração das grades mencionadas nos itens a) e

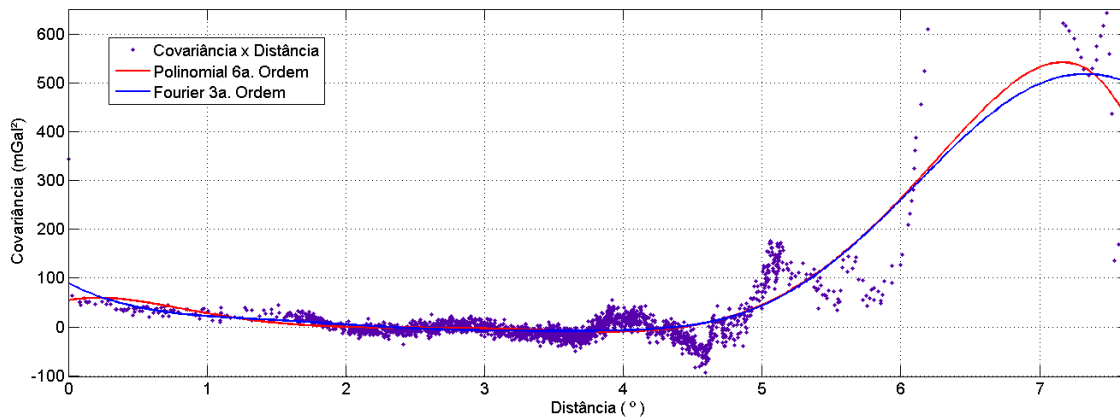
b) mencionados por último. Isto é o que se apresenta na terceira linha (segunda coluna) do quadro 6.

### **5.6. Obtenção de uma função covariância modeladora das anomalias da gravidade para as regiões A e B**

Pode-se dizer que a principal dificuldade da utilização da CMQ no Brasil está vinculada à determinação da função covariância empírica, a ser ajustada pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). Para esta tese, construiu-se um programa capaz de gerar tal função considerando-se que se trabalha com uma grande base de dados e uma região pouco extensa. Esta consideração está associada a dois aspectos importantes: 1) uma grande base de dados implica considerar que há uma quantidade de pontos tal que se torna dispensável a homogeneização das distâncias de correlação e, 2) uma região pouco extensa aqui significa dizer que trata-se de uma região onde a distância até o ponto de informação conhecida mais próximo pode ser avaliada como sendo plana. Outro aspecto a ser recordado está relacionado com os efeitos de ordem superior: em geral, se ajusta a função escolhida e se obtém os resíduos; estes, então são ajustados valendo-se do mesmo processo anterior e têm-se aí os efeitos de segunda ordem. O processo poderia ser repetido  $n$  vezes onde se teria o efeito de  $n$ -ésima ordem para a CMQ. Entende-se que os efeitos de ordem superior têm significados físicos que são desconsiderados neste trabalho. Cabe destacar, portanto, que a solução apresentada somente avalia os efeitos de primeira ordem, ou seja, há uma única etapa de ajuste tal que as diferenças relativamente ao modelo são tratadas como resíduo e ruído. Esta solução está apresentada no Apêndice G.

A etapa seguinte envolve a escolha de uma função que modele o comportamento da função empírica. Em geral, o grupo do LARAS/UFPR tem escolhido algumas funções com base na análise visual associada ao indicador de aderência (ou coeficiente de determinação)  $R^2$  entre as amostras e o modelo construído. É possível visualizar na Figura 52 o comportamento dos ajustes realizados. No primeiro caso, apresenta-se um polinômio de 6.<sup>a</sup> ordem, que resultou um  $R^2$  de 0,762 e, no segundo caso, uma função de Fourier de 3.<sup>a</sup> ordem. que

apresentou um  $R^2$  de 0.756. As características destes dois ajustes são apresentadas nos Quadros 7 e 8.



**Figura 52** - Covariância empírica (Covariância) e ajustes aplicados.  
FONTE: O Autor.

**Quadro 7** - Polinômio de 6.<sup>a</sup> ordem ajustado.  
FONTE: O Autor.

Modelo:

$$f(d) = p1*d^6 + p2*d^5 + p3*d^4 + p4*d^3 + p5*d^2 + p6*x + p7$$

Coeficientes ajustados:

$$\begin{aligned} p1 &= -0.2764 \\ p2 &= 5.359 \\ p3 &= -37.87 \\ p4 &= 122.6 \\ p5 &= -175.4 \\ p6 &= 59.82 \\ p7 &= 53.78 \end{aligned}$$

$R^2$ : 0.762

RMS: 31.71

**Quadro 8** - Função de Fourier.  
FONTE: O Autor.

Modelo:

$$f(d) = a0 + a1*\cos(d*w) + b1*\sin(d*w) + a2*\cos(2*d*w) + b2*\sin(2*d*w) + a3*\cos(3*d*w) + b3*\sin(3*d*w)$$

Coeficientes ajustados:

$$\begin{aligned} a0 &= 154.1 \\ a1 &= 44.09 \\ b1 &= -232.8 \\ a2 &= -100.2 \\ b2 &= -24.09 \\ a3 &= -8.832 \end{aligned}$$

$b_3 = 22.57$ $w = 0.662$
$R^2: 0.756$ RMS: 32.08

Deve ser lembrado aqui que para a geração desta função covariância empírica, extraiu-se a média geral de todas as anomalias utilizadas. O ajuste dos modelos foi realizado pelo MMQ. Os problemas de inversão já mencionados estão relacionados para as inversa e pseudoinversa do modelo polinomial apresentado no Apêndice L

Embora não se aborde neste trabalho, os modelos clássicos da CMQ (e.g. Kaula; Hirvonen) utilizados usualmente para dados globais não têm evidenciado desempenhos razoáveis para soluções locais quando comparados com os modelos apresentados nesta seção e conforme discutido em Pereira et Al. (2011b).

### 5.7. Treinamento de uma RNA para obtenção de anomalias da gravidade nas regiões A e B

Treinar uma RNA significa que foi possível encontrar uma distinção de classes para todo o conjunto de dados e então existe a possibilidade da predição em pontos de interesse. Neste trabalho, a matriz do conhecimento foi determinada (aqui, cabe lembrar que talvez a palavra mais adequada talvez seja *treinada*) a partir do treinamento *Levenberg-Marquardt backpropagation* (usualmente é utilizada somente a terminologia *backpropagation*) de uma rede neural construída em cascata. O algoritmo para este treinamento foi desenvolvido em ambiente Matlab por Alfonso Rodrigo Tierra Criollo (TIERRA CRIOLLO e DE FREITAS, 2005) e o treinamento para utilização desta rotina foi dado pelo próprio desenvolvedor a partir de recursos fornecidos pelo LARAS/UFPR. Doravante, esta rotina será chamada ARTC.

O ARTC foi construído de tal modo que é possível alterar a arquitetura da RNA levando em conta interesses específicos: neste caso é possível escolher o tipo de treinamento, o número de camadas, o número de neurônios por camada, além de algumas outras características não relacionadas com a arquitetura, como por exemplo o número de épocas desejada e a meta de treinamento. A arquitetura da

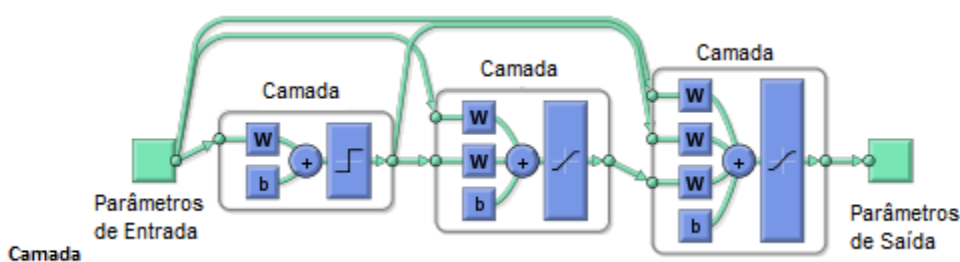


RNA utilizada aqui está representada na Figura 53. Naquela figura,  $b$  representa o *bias*,  $W$  representa os pesos (*weight*),  $+$  representa uma soma ponto à ponto (como na teoria de filtros, já apresentada) e os símbolos nos retângulos são as funções de transferência. Maior quantidade de detalhes sobre a escolha dos parâmetros mencionados no parágrafo acima pode ser encontrada em Misity et al. (1996).

Aqui, preferiu-se utilizar a estratégia de treinamento apresentada no Quadro 9. A escolha desta estratégia baseou-se em dois aspectos: 1) a experiência do LARAS tem demonstrado que RNAs com arquiteturas simples e poucos neurônios tem melhor capacidade de generalização relativamente aos modelos mais complexos; e 2) embora exista a possibilidade de incluir mais parâmetros de saída advindos de outras fontes de dados (por exemplo, alturas geoidais advindas do EGM2008) aqui se preferiu o caso mais simples para que se tenha uma comparação concreta com a CMQ. Outros exemplos de parâmetros de saída estão apresentados em Pereira et Al. (2011).

**Quadro 9** - Estratégia aplicada para o treinamento da RNA. FONTE: O Autor.

Treinamento: <i>Backpropagation</i>
Número de Camadas: 3
Número de neurônios por camada: 4 (1. <sup>a</sup> Camada), 1 (2. <sup>a</sup> Camada) e 1 (3. <sup>a</sup> Camada);
Funções de Transferência: <i>Symmetric hard-limit transfer function</i> (1. <sup>a</sup> Camada), <i>Saturating linear transfer function</i> (2. <sup>a</sup> Camada) e <i>Hyperbolic tangent sigmoid transfer function</i> (3. <sup>a</sup> Camada) <sup>7</sup>
Meta de treinamento: 0.01
Parâmetros de Entrada: Latitude; Longitude;
Parâmetros de Saída: Anomalia da Gravidade <i>free-air</i>

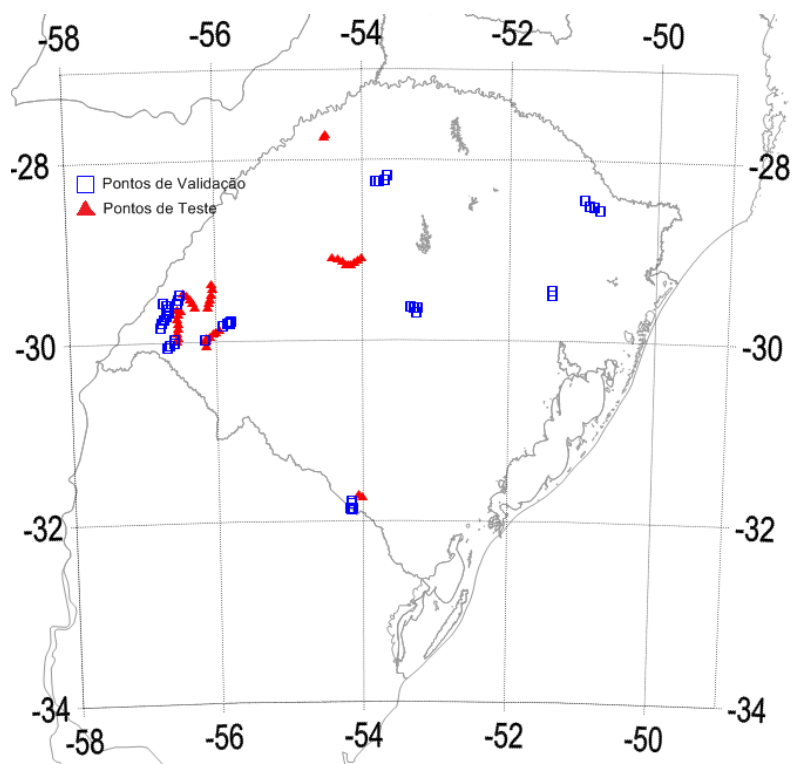


**Figura 53**- Representação da arquitetura de RNA utilizada na Tese.  
FONTE: Adaptado de MISITY (1996)

Convém mencionar que se reservaram 40 pontos para validação e 40 pontos para teste (representados na Figura 54). Também deve ser lembrado que embora o procedimento seja repetido utilizando-se exatamente as mesmas características,

<sup>7</sup> Entende-se que a melhor tradução destas funções para o português seriam uma função pulso simétrica para a primeira camada, uma função cumulativa linear para a segunda camada e uma função tangente senoidal hiperbólica para a terceira camada.

espera-se que os resultados sejam ligeiramente diferentes. Estes resultados estão associados com o *bias*, o qual é totalmente aleatório e é gerado a cada vez que se utiliza a função de transferência.



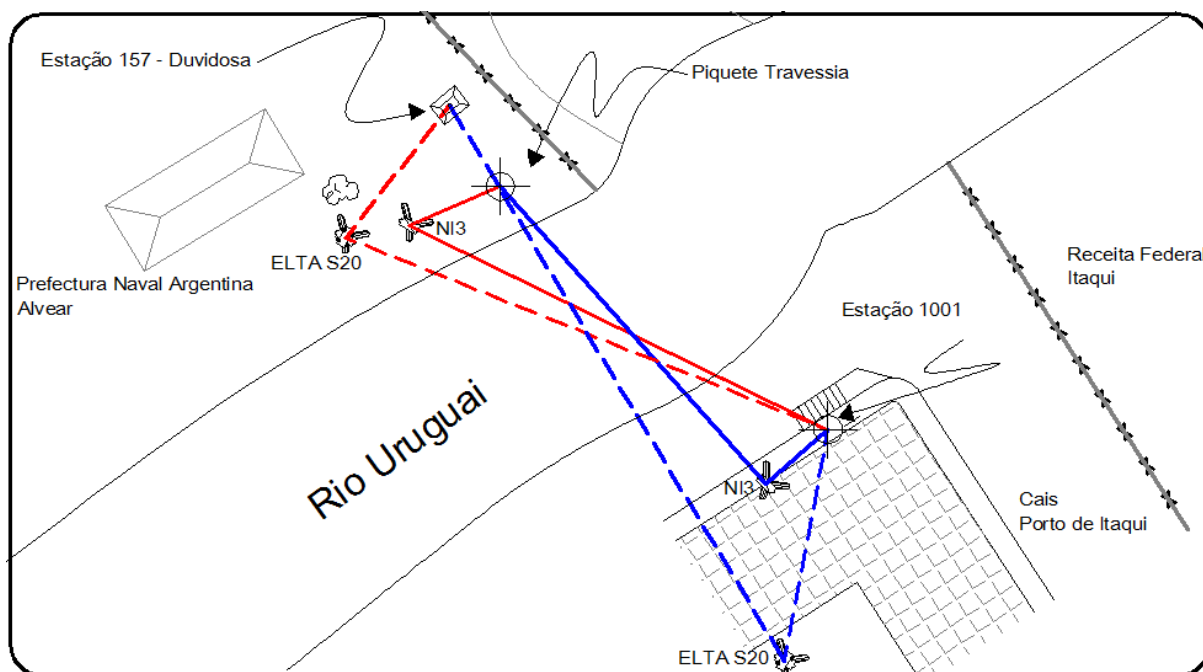
**Figura 54** - Pontos de teste e validação utilizados no treinamento da RNA.  
FONTE: O Autor.

O treinamento foi realizado após 9 épocas com um RMS de 0.961 mGal.

### 5.8. Verificação da estabilidade das conexões geradas

Até esta seção da tese, como já citado, os diversos produtos são função do resultado obtido de três diferentes conexões realizadas na fronteira sul do Brasil com a Argentina. Uma estimativa geral da possível propagação dos erros associados pode ser efetivada mediante uma análise dos circuitos geopotenciais formados naquela região pela UFPR com o apoio das demais instituições citadas na seção 3. Esta análise preliminar foi realizada pela primeira vez em 2009 (PEREIRA, 2009). Convém recordar que à época, o marco identificado como *Pi Point* (Na Figura 44 trata-se de um ponto contido em um círculo vermelho para o qual convergem linhas azuis, do lado argentino da fronteira) não estava devidamente caracterizado ocasionando um erro grosseiro na determinação dos desníveis. Este ponto tratava-

se do ponto *Pa Point*, já referido aqui. Visando-se à clareza, apresenta-se este mesmo ponto sob a óptica do trabalho de 2009 na Figura 55. Ali, este ponto está identificado como *Estação 157 - Duvidosa*.



**Figura 55** - Estação duvidosa de 2009.  
FONTE: PEREIRA (2009)

Assim, o erro devido à falsa identificação dos pontos deve ser destacado. Uma vez identificado este erro, a ratificação do referido problema foi apresentada na Reunião SIRGAS realizada em Lima (DE FREITAS et al., 2010) e, é importante lembrar que estes resultados se referiam ao AAGP.

Nesta seção se apresenta, portanto, um novo sistema de altitudes dinâmico a partir das altitudes fornecidas pelo IBGE com base no AA2011. Não foi buscado um novo valor do número geopotencial, também referido ao AA2011 para a RN 1931A uma vez que os valores dos desníveis brutos relativos ao DVB permanecem os mesmos. Deste modo, embora o novo circuito geopotencial para a região tenha sido calculado a partir da nova realização fornecida pelo IBGE, o sistema local, ou seja os dois circuitos geopotenciais formados, permanecem vinculados ao geopotencial de referência na realização antiga. De fato, isto não é um problema grave uma vez que o aspecto mais importante da análise está relacionado com os desníveis geopotenciais e sua relação com um SGA.

Como a ideia deste sistema dinâmico é viabilizar o vínculo das redes verticais tanto do Brasil como da Argentina, utilizou-se somente a média aritmética

da gravidade observada nos pontos dos circuitos, que resultou em 979237,187 mGal. As planilhas contendo os detalhes destes dois circuitos estão apresentadas nos Apêndices H e I. Convém, no entanto, destacar que embora exista uma coluna nominada *Datum* que se presta exclusivamente a estabelecer a origem da informação para o ponto em questão; todas as altitudes dinâmicas estão referidas ao DVB-I (AAGP), ainda que os desníveis do lado brasileiro estejam referidos ao DVB-I (AA2011).

Outra importante informação se refere aos novos erros de fechamento de ambos os circuitos. Incluindo os dados do AA2011, têm-se erros de fechamento de 0,407m e 0.048 m quando se levam em conta somente as altitudes fornecidas pelas bases de dados de ambos os países. Ao adicionarem-se os valores da gravidade há uma melhora de desempenho na rede local. Quando são utilizados desníveis geopotenciais em substituição aos desníveis altimétricos - aqui estes desníveis são compreendidos como diferenças entre altitudes de pontos cujos valores foram fornecidos pelos bancos de dados dos países em questão - verifica-se uma melhora na eficiência deste tipo de comparação de 0,26% e 0,79% para os dois erros apresentados, respectivamente. Cálculos equivalentes referidos ao AAGP estão documentados em De Freitas et al. (2010).

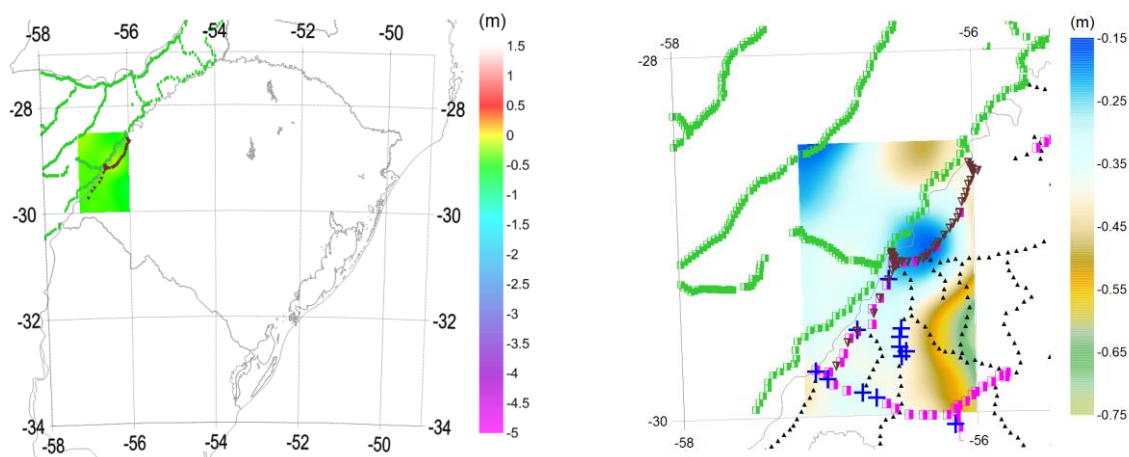
Como não foram levadas em conta as informações provenientes da conexão São Borja/Santo Tomé, fonte da maior parte do erro de fechamento de um dos circuitos, uma análise crítica permite concluir que um erro da ordem de cinco centímetros pode ser esperado ao conjugarem-se as altitudes da RAFB e da RAFA em um mesmo sistema vertical. Evidentemente, quando objetiva-se o cálculo do geoide/quasegeoide (é o caso) este erro é minimizado devido às etapas de integração inerentes ao processo.

## **5.9. Autoconsistência das soluções geradas**

### **5.9.1. Cogeioide Regional versus EGM2008.**

Ao fazer a diferença do cogeioide obtido com o EGM2008 obtém-se a já apresentada média da ordem dos -0,735 m. Um estudo interessante se apresenta ao discretizar a região de estudos, de modo a retirar os efeitos daquelas regiões onde

inexistem as informações. Apresenta-se então mais uma vez a diferença entre o EGM2008 e o cogeioide calculado (via metodologia clássica), considerando, todavia, somente a área discretizada (Figura 56, Esquerda). Alterando-se os intervalos da escala da representação, para que se tenha destaque pormenorizado das diferenças, chega-se ao resultado apresentado na Figura 56 (Direita). Tais considerações levaram a uma diferença média de -0,369 m.

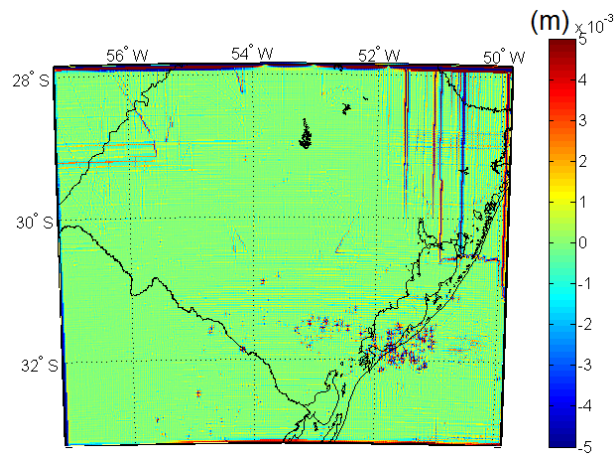


**Figura 56** - Grade do EGM2008 menos a do cogeioide determinado via metodologia clássica. Panorama geral (Esquerda) e em detalhes (direita).  
 FONTE: O Autor.

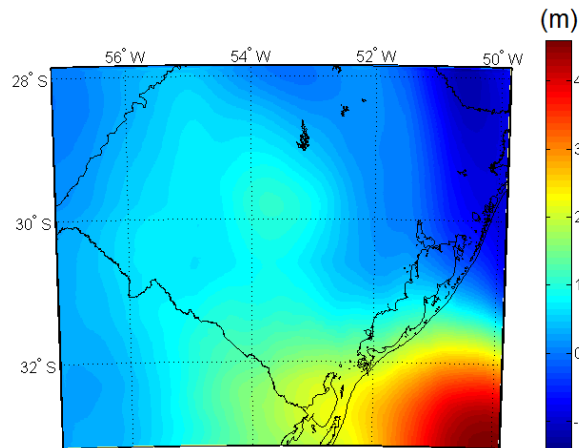
#### 5.9.2. Cogeioide (Teoria Clássica) versus modelagem do geioide por *wavelets*

Cabe destacar as diferenças entre os longos comprimentos de onda do Geopotencial, traduzidos aqui pelo EGM2008 truncado no grau 360, menos a solução associada à modelagem do geioide por *wavelets*, apresentada no Quadro 6. Tal diferença deve fornecer um indicativo da possibilidade da transformada *wavelet* ter eliminado os curtos comprimentos de onda para a solução referida. O aparecimento de resíduos na região centro-sul do Rio Grande do Sul indica que este fato não aconteceu, ainda que uma análise pormenorizada neste caso seja prejudicada por erros de referenciamento espacial dos dados. Estes erros de referenciamento normalmente se manifestam em termos de linhas horizontais e verticais, apontando que, ou em todas as linhas ou em todas as colunas, houve uma deficiência sistemática da quantidade que foi trabalhada e que influenciam a magnitude final das diferenças entre as grades. Todas as questões deste parágrafo são apresentadas na Figura 57.

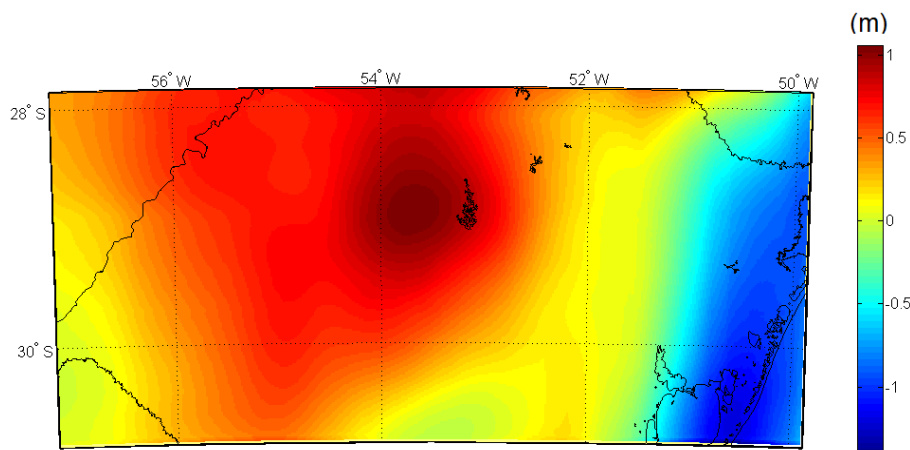
Outra diferença que merece algum julgamento é a da grade do cogeioide obtido menos a do modelo geoidal obtido por *wavelets*, na Figura 58. Esta diferença, hipoteticamente, revelaria a compatibilidade entre a solução clássica e a nova proposição, exceto pelos efeitos na região oceânica, gerados provavelmente pelo alto gradiente batimétrico característico da plataforma continental naquela região. Quando se recorta a região excluindo-se as latitudes menores que 30°50'S, minimizando os efeitos na região oceânica, obtém-se uma média de 0,206 m para a grade considerada. O recorte considerado está apresentado na Figura 59.



**Figura 57** – Grade do EGM2008 (360) menos a da solução do geioide por *wavelets*.  
FONTE: O Autor.



**Figura 58** – Grade do cogeioide menos a da solução do geioide por *wavelets*. Unidades em metros.  
FONTE: O Autor.



**Figura 59** – Grade do cogeóide menos a da solução do geóide por *wavelets*. Região discretizada.  
FONTE: O Autor.

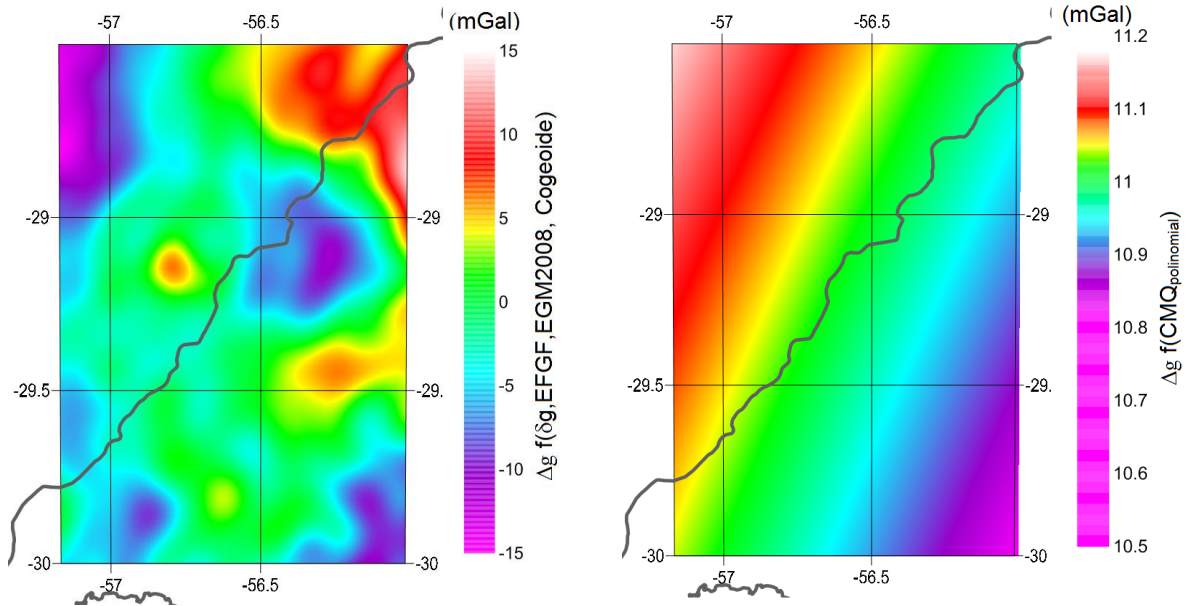
### 5.9.3. $\Delta g_{\text{CMQ}}$ versus $\Delta g_{\text{RNA}}$ versus $\Delta g_{\text{wavelets}}$ versus $\Delta g_{\text{cogeóide}}$

Uma avaliação da eficiência das diferentes técnicas de homogeneização (cujo entendimento pode estar associado a quaisquer dos seguintes termos: predição, regularização ou interpolação) pode ser efetivada utilizando-se os produtos mencionados nas seções anteriores.

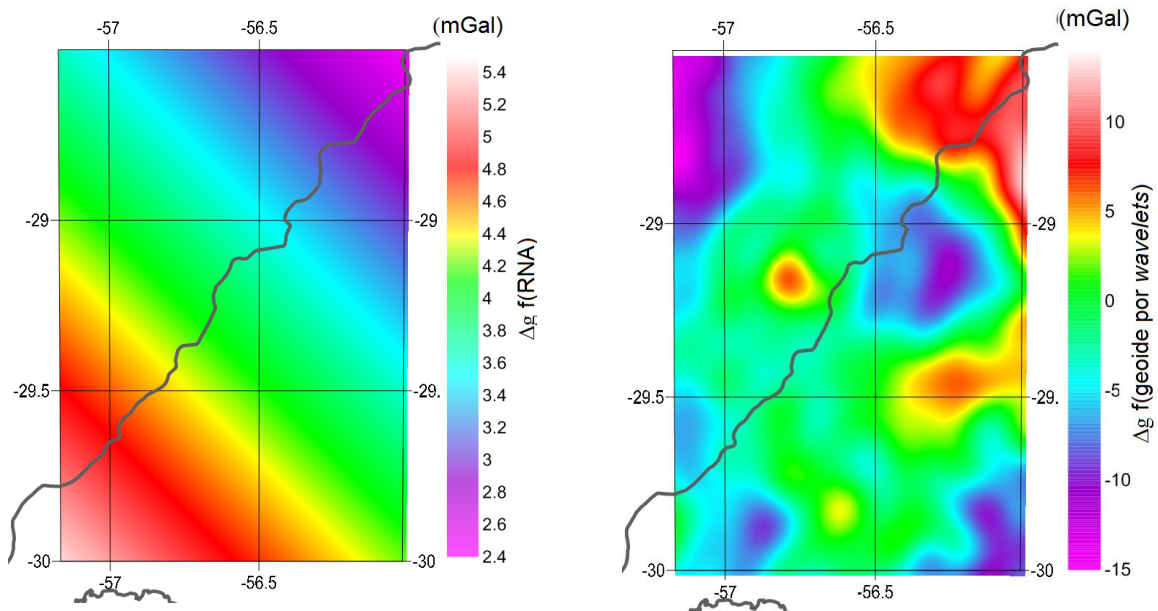
O cogeóide obtido pode ser convertido em um modelo de anomalias da gravidade valendo-se da Equação Fundamental da Geodésia Física (EFGF) e um modelo de distúrbios da gravidade proveniente do EGM2008. Tanto a referida equação como o Distúrbio da Gravidade são exaustivamente apresentados na seção 2 de Hofmann-Wellenhopf e Moritz (2005). Esta solução está apresentada na Figura 60, à esquerda.

Na Figura 60, à direita, utilizam-se as anomalias da gravidade *free-air* interpoladas por CMQ a partir da função covariância polinomial apresentada na seção 5.6. O programa está pormenorizado em Pereira et al.(2011b), e foi aprimorado em termos de eficiência computacional para o desenvolvimento desta tese. O código fonte deste programa está apresentado no Apêndice J.





**Figura 60** - Anomalias da Gravidade.  
FONTE: O Autor.



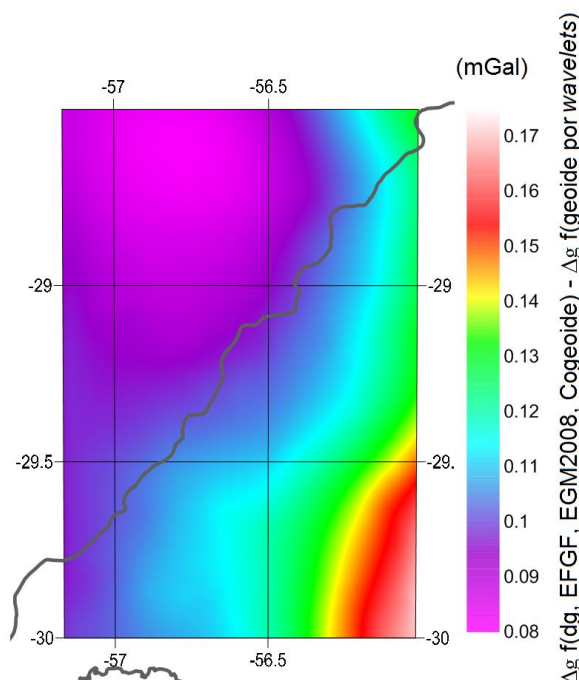
**Figura 61** - Anomalias da Gravidade.  
FONTE: O Autor.

Na Figura 61 (esquerda), apresenta-se a grade obtida via predição com uma RNA multicamada, conforme apresentado na seção 5.7. Na mesma figura, à direita, apresenta-se uma grade de anomalias da gravidade obtida a partir da resolução da equação fundamental da Geodésia Física para anomalias da gravidade a partir do conhecimento de distúrbios da gravidade advindos do EGM2008 e a solução geoidal por *wavelets*. Aqui fica evidenciada a regularização dos dados ocasionada por técnicas convencionais. Cabe lembrar que o desempenho deficiente das RNAs no



caso apresentado pode ser otimizado se associadas outras funcionais do Geopotencial.

A média da diferença entre anomalias da gravidade derivadas da solução associada ao cogeioide (grade do cogeioide menos a da solução por *wavelets*) e da solução por *wavelets* resultou num valor de 0,106 mGal com um RMS de 0,108 mGal. Esta grade de diferenças é apresentada na Figura 62.



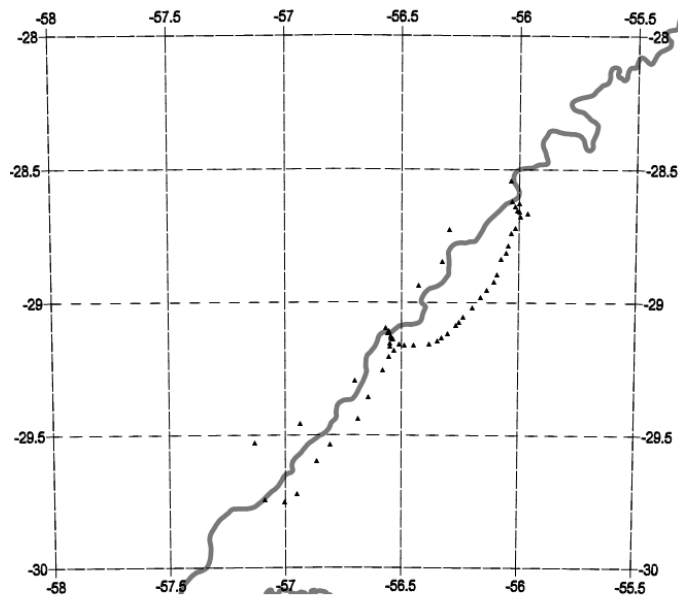
**Figura 62** - Diferença entre grades de anomalias da gravidade.  
FONTE: O Autor.

#### 5.9.4. Uma solução em termos de distúrbios da gravidade

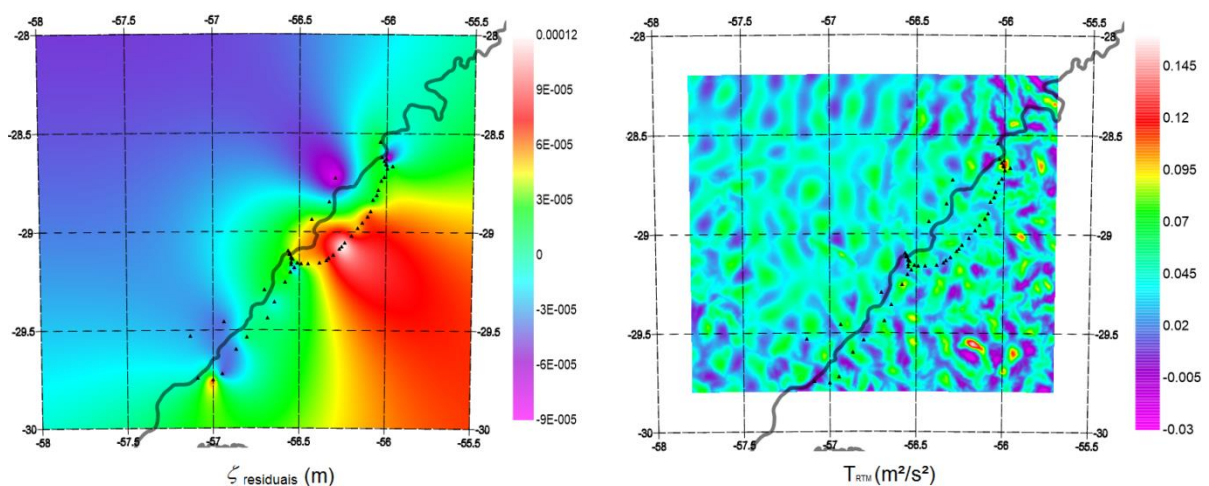
É possível aplicar a solução do ponto de vista do Problema de Valor de Contorno da Geodésia Fixado (PVCG Fixado), em termos de distúrbio da gravidade. Esta solução fornece subsídios para confirmar se a solução por *wavelets* é livre de Datum. Tal solução segue as (2.18) e (2.19). Infelizmente, essa solução só pode ser aplicada se forem conhecidas altitudes elipsoidais associadas a observações da gravidade. Na região de estudos A, isto aponta para os pontos apresentados na Figura 63.

Ao utilizar o SRTM como modelo digital de altitudes e o ETOPO1 truncado no grau 360 como modelo de referência, é possível calcular o efeito RTM em termos de distúrbios da gravidade e em termos de anomalias de altitude. No primeiro caso, calculou-se o efeito sobre as estações onde dispunha-se de altitudes elipsoidais e

procedeu-se à sua regularização (interpolação). Esta grade foi submetida à Integração pelo do *kernel* de Koch. Tal integração gerou as anomalias de altitude residuais, apresentadas na Figura 64 (à direita). Para a determinação do efeito em termos da anomalia de altitude, primeiro gerou-se o efeito em termos potenciais e, usando-se a razão  $9.79 \text{ m/s}^2$  encontrou-se o referido efeito, representado na Figura 64 (Esquerda).

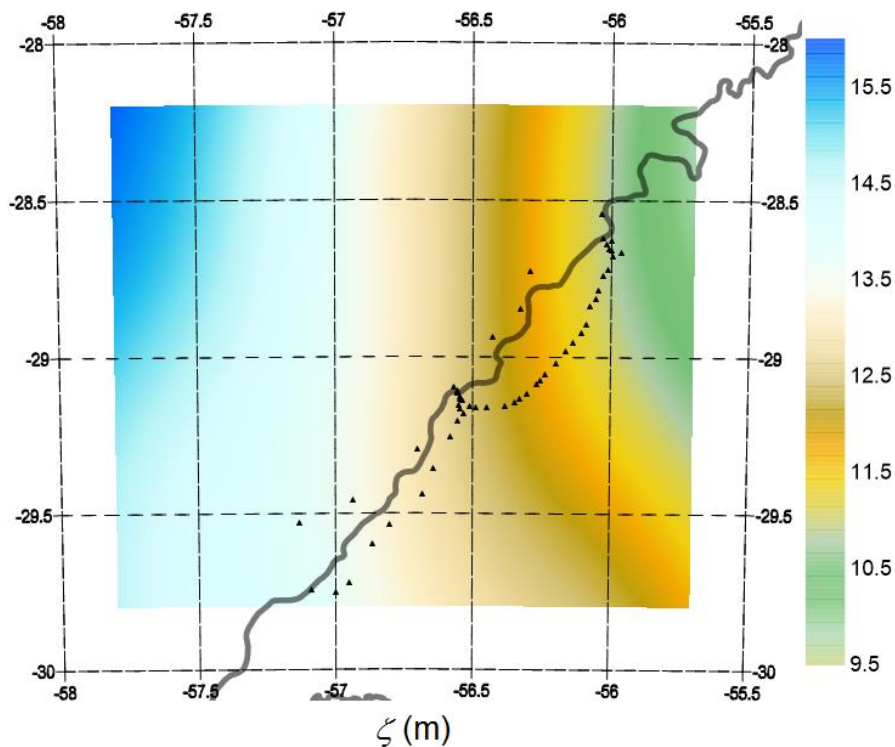


**Figura 63** - Pontos GNSS associados com gravimetria.  
Fonte: O Autor.

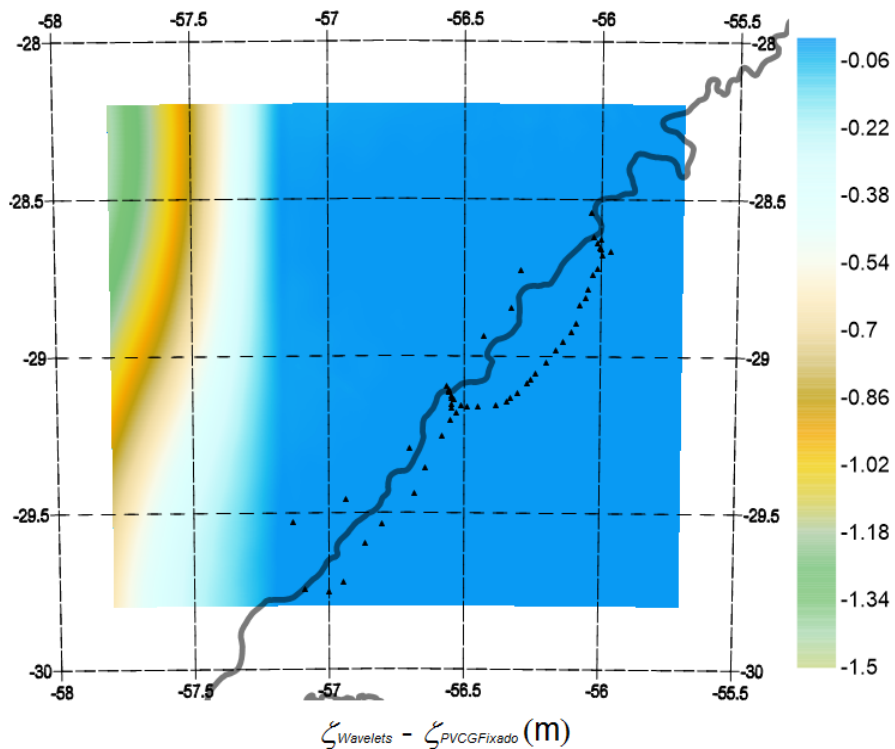


**Figura 64** -  $\zeta$  residuais (à direita) e efeito RTM em termos de  $T$  (à esquerda).  
Fonte: O Autor.

A solução final (*restore*) e a sua comparação com a solução por *wavelets* são apresentadas na Figura 65 e 66, respectivamente.



**Figura 65** - Solução do PVCG Fixado  
Fonte: O Autor.



**Figura 66** - Solução geoidal por wavelets menos solução pelo PVCG Fixado  
Fonte: O Autor.

## 6. CONTRIBUIÇÕES DESTA PESQUISA PARA AS CIÊNCIAS GEODÉSICAS NO BRASIL

Além dos aspectos relacionados com o processamento de dados, verificação e ratificação de soluções já consagradas para o cálculo do geoide/quasegeoide, apresentação destas soluções em código aberto, discussão de problemas operacionais na implementação de soluções voltadas à Teoria do Potencial, convém também destacar as seguintes contribuições desta pesquisa para as Ciências Geodésicas no Brasil:

- a) Até então, não se conhecia trabalho que correlacionasse as *wavelets* à Geodésia Física no Brasil. Trabalhos anteriores com *wavelets* aplicados às Ciências Geodésicas (e.g. as teses de doutorado de Eniuce M. Souza, 2008 – UNESP-PP e Clovis Gaboardi, 2009 – UFPR) estão vinculados à análise de sinais no tempo e/ou encapsulamento de informações visando a transmissão de dados;
- b) usualmente as pesquisas apresentam as *wavelets* dentro de um escopo intrínseco à matemática, fator que dificulta a abordagem em termos de soluções práticas para a resolução dos problemas de engenharia. Aqui, se recupera o ponto de vista da análise de sinais de WEEKS (2007), facilmente simulável dentro de qualquer metodologia que se utilize dos métodos numéricos computacionais e sem rebuscar aos aspectos mais formais da metodologia *wavelet*. Há, portanto, uma tradução deste ponto de vista para o cálculo do geoide em uma de suas etapas;
- c) obteve-se um cogeioide para boa parte do estado do Rio Grande do Sul com resolução de um minuto de arco (0,016666 graus). Este cogeioide está referido à Imbituba e não apresenta as dificuldades clássicas geradas para as soluções locais em regiões de fronteira. Também nesta solução apresentam-se claramente as fontes de dados utilizadas;
- d) apresenta-se um número (seção 5.3) que pode ser utilizado para a transformação de datum vertical, na fronteira do Brasil com a Argentina referido ao DVB-I. Este número é importante para manter anomalias da gravidade clássicas ou no sentido da Teoria de Molodenskii vinculadas ao mesmo referencial;

- e) Documentação de muitas das atividades realizadas pelos LARAS/UFPR, IBGE, IGN e UNLP na conexão dos *data* verticais do Brasil e da Argentina ao longo de três anos bem como todas as dificuldades superadas e a superar;
- f) Há a indicação concreta da possibilidade de recuperação/interpolação de informações com a consideração das variabilidades laterais para o geopotencial em contraste com as técnicas usuais, usualmente isotrópicas (e.g., a *krigagem* sobre anomalias da gravidade), que são parametrizadas usualmente em função de correlações espaciais sem consideração de heterogeneidades laterais;
- g) São apresentados dois modelos funcionais (seção 5.6) para a determinação de anomalias da gravidade na região de fronteira do Brasil com a Argentina e um programa gerador da função covariância empírica. Entende-se que uma vez conhecida a função covariância empírica, outros pesquisadores podem passar a testar outros modelos baseados em MMQ e, então, enriquecer a discussão sobre funções isotrópicas;
- h) Apresentam-se duas (por *wavelets* e pelo PVCG Fixado) soluções livres de Datum que podem ser utilizadas na região da fronteira do Brasil com a Argentina.

## 7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

As *wavelets* praticamente eliminaram as diferenças sistemáticas da ordem de -0,730m na diferença entre as combinações provenientes dos longos e curtos comprimentos de onda do Geopotencial provavelmente decorrência do excelente desempenho do EGM2008 em termos de consistência e resolução espacial. Este resultado certamente poderá ser ratificado ou refutado mediante a avaliação da utilização de um diferente MGG de referência (e.g. as novas soluções EIGEN recém divulgadas pelo ICGEM) - no entanto com a introdução de novas dificuldades tais como as associadas com a discussão dos referenciais envolvidos, Também a solução do problema fixado, com distúrbios da gravidade, comprovou tal hipótese

As *wavelets* se mostraram eficientes, pelo menos quando se consideram as resoluções empregadas neste trabalho, no tratamento de diferentes referenciais envolvidos. Esta eficiência está bem fundamentada na separação espectral do sinal em portadoras, que carregam as frequências mais baixas e os *detalhes* que carregam as frequências mais altas. Assim, é possível extrair a banda mais eficiente de cada porção do espectro. Esta foi a ideia central aplicada nesta pesquisa: utilizou-se a rigidez do referencial presente no EGM2008 truncado nos graus menores combinando-se com os *detalhes* provenientes da gravimetria e do terreno. O resultado se mostrou melhor que a solução clássica. A solução por *wavelets* não envolve o efeito indireto presente naquela solução. Os eventuais efeitos perniciosos referentes aos diferentes referenciais envolvidos são praticamente eliminados na solução baseada em *wavelets*. Tais efeitos presentes no EGM2008 ficam ligados somente à matriz de *aproximação*.

Uma limitação técnica que deve ser enfatizada surge na medida em que a tecnologia melhora e a resolução espacial dos modelos aumenta. Isto porque as diversas decomposições e reconstruções *wavelet* necessitam cada vez de mais matrizes para representar os menores comprimentos de onda. Assim como outras técnicas de decomposição espectral, depende cada vez mais de *hardwares* mais robustos, ainda que em menor grau do que, por exemplo, nas transformadas de Fourier em duas dimensões.

Um aspecto que deve ser assinalado é a necessidade de se tratar conjuntamente dados de diferentes naturezas. Por exemplo, poderia ter sido lançada

a hipótese de combinar alturas geoidais residuais com dados puros do terreno. O resultado e o significado físico destas combinações é algo que certamente merece ainda discussão e que aqui aponta-se como recomendação para futuras análises, buscando explorar mais as potencialidades das transformadas *wavelets*.

Cabe ainda um pequeno destaque acerca das etapas interpolativas. As *wavelets* em duas dimensões carecem necessariamente de matrizes de dimensões regulares e totalmente preenchidas. Como por diversas vezes citou-se neste trabalho, as observações são em geral heterogêneas em termos da sua resolução e distribuição espacial. Sugere-se, neste sentido, sempre uma verificação da adequação à este ponto, uma vez que técnicas de preenchimento (e.g. *zero padding*, krigagem, etc.) nem sempre resultam em modelagens realísticas. Um bom exemplo pode ser percebido nesta pesquisa quando se faz uma verificação rápida dos dados oceânicos. Por conseguinte, mesmo que as *wavelets* sejam capazes de discriminar o conteúdo espectral, não foi possível eliminar as etapas interpolativas para gerar as matrizes regulares, necessárias à transformada *wavelet* 2D. É importante lembrar também que a característica ortogonal das transformadas *wavelet* utilizadas resulta em resíduos praticamente nulos ao se trabalhar com efeitos puros.

Também ficou claramente percebido o benefício da consideração dos valores da gravidade para mitigação dos erros de fechamento dos circuitos. Assim, deve ser destacada a utilização de desníveis geopotenciais.

Sobre a CMQ, destaca-se:

a) Tem como característica predominante a isotropia uma vez que, em geral, seu núcleo é função exclusiva da distância, não apresentando a capacidade de discriminação de aspectos anisotrópicos;

b) É adequada para o tratamento de efeitos de ordem superior. Recomenda-se a busca da relação dos efeitos do ajuste de um modelo de segunda ordem relativamente à topografia residual. Assim, recomenda-se explorar a manutenção da CMQ na predição de dados gravimétricos em regiões pouco extensas quando do emprego da técnica RTM;

c) Fica evidenciado na seção 5.9.3 o problema da linearização do modelo em distâncias pequenas devido à distância de correlação. Em regiões maiores (que um grau, por exemplo), portanto, é indispensável a busca de um *kernel* anisotrópico;

d) Há uma clara homogeneização dos dados quando se utiliza funções covariância isotrópicas, tal que seus resultados apontam grandes distorções relacionadas com o campo da gravidade com supressão ou redução dos detalhes. Por considerar-se que este tipo de divergência é totalmente avessa à realidade, preferiu-se não apresentar dados quantitativos relacionados à predição baseada em CMQ e em RNAs na seção 5.9.3;

e) As comparações que levam em conta somente diferenças ponto à ponto (em geral, RMS) são problemáticas. Embora estas diferenças sejam um indicativo importante, nesta pesquisa se mostraram insuficientes para explicar a total variabilidade do campo da gravidade (novamente, conforme a seção 5.9.3). Uma vez escolhido o modelo para a função covariância, deve-se dar preferência a predição de toda uma região em substituição à usual predição somente sobre pontos de interesse. O problema do tempo necessário à resolução de uma grade completa, devido à alta redundância espacial, pode ser solucionado mediante a solução à priori da matriz variância covariância e o seu armazenamento na forma numérica, sem realizar a inversão em cada etapa. Notou-se uma diferença significativa em termos de tempo de processamento após a adoção deste procedimento.

As RNAs apresentaram desempenho insuficiente para a base de dados e arquitetura consideradas.

Recomenda-se a continuidade dos estudos de conexão do Brasil com a Argentina em termos de números geopotenciais. O problema relativo à RN 1931A associado ao AA2011 deve ser investigado. Uma verificação a respeito da qualidade e da origem das informações obtidas do lado argentino, bem como a obtenção de um sistema de números geopotenciais argentinos seriam convenientes para novas análises.

Recomenda-se explorar a conexão Porto Xavier como alternativa para rever o problema da conexão em São Borja/Santo Tomé. Outra dúvida que deverá ser dirimida está associada aos *data* gravimétricos de ambos os países e suas atualizações.

Por fim, evidenciou-se que as *wavelets* são capazes de detectar e modelar anisotropias e propiciar soluções no espaço do geopotencial.



## 8. REFERÊNCIAS

ANTAS, L.M. **Dicionário de Termos Técnicos Inglês-Português**. Aclimação: Traço Editora, 20???. 6a.ed. 948p.

BAJRACHARYA, S. **Terrain Effects on Geoid Determination**. Thesis (Department of Geomatics Engineering) – University of Calgary, Calgary, 2003. Disponível em <<http://www.geomatics.ucalgary.ca/graduatetheses>>. Acesso em: 12/10/2010

BÉNÉTEAU, C.; Van Fleet, P.J. Discrete wavelet transformations and undergraduate education. **Notices of the AMS**. 58(5):656-666, 2011.

BOMFORD, G. **Geodesy**. London: Oxford University Press, 1980. 4th ed.

CRISP. **Digital Image**. Centre for Remote Imaging, Sensing & Processing. Disponível em <<http://www.crisp.nus.edu.sg/~research/tutorial/image.htm>>. Acesso em 12/09/2012.

DE FREITAS, S.R.C.; DEL COGLIANO; D. LUZ, R.T.; CIMBARO, S.; PEREIRA, R.A.D.; GOMEZ, M.E. Present activities for connecting Brazilian and Argentine Vertical Networks with basis on geopotential numbers. **Sirgas Reunion, Lima**, 2010. Disponível em < <http://www.sirgas.org/index.php?id=212>>, Acesso em 19/05/2010.

EL-HABIBY, M.;SIDERIS, M. Inverting the Stokes and Vening Meinesz integrals using the wavelet transform. **International Gravity Field Service Conference Proceedings**, Istambul:I GFS, 2006a. Disponível em< [http://www.hgk.msb.gov.tr/dergi/makaleler/OZEL18/ozel18\\_40.pdf](http://www.hgk.msb.gov.tr/dergi/makaleler/OZEL18/ozel18_40.pdf)>. Acesso em 08/04/2011.

EROL, S. Time-frequency analysis of tide gauge sensor data. **Sensors**. v. 11. pp. 3939-3961, 2011.

FARR, T.G.; ROSEN, P.A.; CARO, E. CRIPPEN, R.; DUREN, R.; HENSLEY, S.; KOBRICK, M; PALLER, M.; RODRIGUEZ, E.; ROTH, L.; SEAL, D.; SHAFFER, S.; SHIMADA, J. **The Shuttle Radar Topography Mission**. 20??. Disponível em <[http://www2.jpl.nasa.gov/srtm/SRTM\\_paper.pdf](http://www2.jpl.nasa.gov/srtm/SRTM_paper.pdf)>, Acesso em 26/03/2013.

FEATHERSTONE, W.E.; KUHN, M.; Height Systems and vertical datums: A review in the Australian context. **Journal of Spatial Science**. pp. 21-42. v.1. n. 51, 2006.

FERREIRA, V.G. **Solução do tipo Brovar para o Segundo Problema de Valor de Contorno da Geodésia com vistas à Modernização de Sistemas de Altitudes**. 173 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas). Universidade Federal do Paraná, 2011.

FLURY, J. Short wavelenght espectral properties of the gravity field from a range of regional data sets.**J. Geod**. 2006, pp. 624-640, n. 79.

FORSBERG, R. The use of spectral techniques in gravity field modelling: Trends and perspectives. **Phys. Chem. Earth**, 1998. v. 23, n.1, pp. 31-39

FORSBERG, R.; TSCHERNING, C.C.; The use of height data in gravity field approximation by collocation. **Journal of Geophysical Research**. pp. 7843-7854. n. 86, 1981.

FREEDEN, W.; SCHNEIDER, F. An integrated wavelet concept of physical geodesy. **Journal of Geodesy**. pp. 259-281. n. 72, 1998.

FREEDEN, W.; GROTEN, E.; MICHEL, V.; ARFA-KABOODVAND, K. Geopotential reconstruction, decomposition, fast computation, and noise cancellation by harmonic wavelets. **Stud. Geophys. Geod.** pp. 37-72. n.47, 2003.

GEMAEL, C. **Introdução à Geodésia Física**. Curitiba: Ed. da UFPR, 1999.

GOINGINGER, H., RIESER, D., MAYER-GUERR, T., PAIL, R., FECHER, T., GRUBER, T., ALBERTELLA, A., MAIER, A., HÖCK, E., KRAUSS, S., HAUSLEITNER, W., BAUR, O., JÄGGI, A., MEYER, U., BROCKMANN, J. M., SCHUH, W.D., KRASBUTTER, I., KUSCHE, J. The Satellite-only global gravity field model GOCO02S. **EGU General Assembly**. Viena: GOCO Consortium, 2011. Disponível em < <http://ftp.tugraz.at/pub/goco/GOCO02S/EGU2011-10571-GOCO02S.pdf> > Acesso em 06/03/2013.

GUTMAN, M., WEAVER, C. Wavelet-based automated river network generalization. **Proceedings of the 3rd International Conference on Computing for Geospatial Research and Applications**. 2012, Article no. 12.

HAYES, M. H.; **Processamento Digital de Sinais**. Porto Alegre: Bookman, 2006.

HIRT, C.; FEATHERSTONE, E.; MARTI, U. Combining EGM2008 and SRTM/DTM2006.0 residual terrain model data to improve quasigeoid computations in mountainous areas devoid of gravity data. **Journal of Geodesy**. pp. 557-567. v.84, 2010.

HEISKANEN, W.; MORITZ, H. **Physical Geodesy**. San Francisco and London: W. H. Freeman and Company, 1967.

HOFMANN-WELLENHOF, B., MORITZ, H. **Physical Geodesy**. Viena: Springer, 2005.

HOFMANN-WELLENHOF, B., MORITZ, H. **Physical Geodesy**. Viena: Springer, 2006. 2nd Ed.

HOLSCHNEIDER, M. Introduction to Continuous Wavelet Analysis. **Wavelets in the Geosciences**. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.

HOUAISS ELETRÔNICO. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Editora Objetiva, 2009.

ICGEM. **International Centre for Global Earth Models**. GFZ German Research Centre for Geosciences. Disponível em <<http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM>>. Acesso em 03/05/2012.

ICGEM. **International Centre for Global Earth Models**. GFZ German Research Centre for Geosciences. Disponível em <<http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM>>. Acesso em 03/05/2013.

IGeS. Services - Schools. **International Geoid Service**. 2013. Disponível em <<http://www.iges.polimi.it/Schools/schools.html>>. Acesso em 11/03/2013.

IHDE, J.; SIDERIS, M.G.; SANCHEZ, L. Concepts for the realization of a world height system - Theme 1 of the Global Geodetic Observing System (GGOS). **Reference Frames for Applications in Geosciences (REFAG 2010)**. Paris: 4-8 October, 2010

JAIN, L.; FANELLI, A.M.; **Recent Advances in Artificial Neural Networks - Design and Applications**. CRC Press LLC, 2000. Disponível em <[http://cdn.preterhuman.net/texts/science\\_and\\_technology/artificial\\_intelligence/RECENT%20ADVANCES%20IN%20ARTIFICIAL%20NEURAL%20NETWORKS%20Design%20and%20Applications%20-%20Lakhmi%20Jain.pdf](http://cdn.preterhuman.net/texts/science_and_technology/artificial_intelligence/RECENT%20ADVANCES%20IN%20ARTIFICIAL%20NEURAL%20NETWORKS%20Design%20and%20Applications%20-%20Lakhmi%20Jain.pdf)>. Acesso em 13/03/2013.

KARKANIS, S.A.; KARRAS, D.A.; MERTZIOS, B.G.; 1-D signal prediction using wavelets. **Journal Neural, Parallel & Scientific Computations**. v. 6, n. 3, pp. 417 - 428, 1998.

KLEES, R.; HAAGMANS, R. **Wavelets in the Geosciences**. Berlim: Springer-Verlag, 2000.

KELLER, W. **Wavelets in Geodesy and Geodynamics**. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2004.

KIRBY, J.F.; FEATHERSTONE, W.E. Terrain correcting Australian gravity observations using the national digital elevation model and the fast Fourier transform. **Australian Journal of Earth Sciences**. pp. 555-562. v.46, 1999

LAMBECK, K. **Geophysical Geodesy: The slow deformations of the Earth**. USA: Oxford Press, 1988.

LANG, C.L. **Kriging interpolation**. Dept. of Computer Science: Cornell University, 2011. Disponível em <<http://www.nbb.cornell.edu/neurobio/land/oldstudentprojects/cs490-94to95/clang/kriging.html>> Acesso em 20/05/2011.

LI, Z.; SCHWARZ, K.P. Approximation of regional gravity fields from multi-scale data. **International Association of Geodesy Symposia**. Gravity, Geoid and Marine Geodesy. v. 117, 1997.

LIU, C. **A tutorial of the wavelet transform**. 2010. Disponível em <<http://disp.ee.ntu.edu.tw/tutorial/WaveletTutorial.pdf>>. Acesso em 11/03/2013.

LUZ, R.T. **Estratégias para modernização da componente vertical do Sistema Geodésico Brasileiro e sua integração ao SIRGAS**. 228 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas). Universidade Federal do Paraná, 2008.

MATHWORKS. **R2011a Documentation - MATLAB**. 2011a. Disponível em <<http://www.mathworks.com/help/toolbox/signal/periodogram.html>> Acesso em 17/05/2011.

MATHWORKS. **R2013b Documentation - MATLAB**. 2013b. Disponível em <<http://www.mathworks.com/help/bioinfo/ref/crossvalind.html>> Acesso em 27/10/2013.

MATOS, A.C.O.C.; BLITZKOW, D.; GUIMARÃES, G.N.; LOBIANCO, M.C.B.; COSTA, S.M.A.; Validação do MAPGEO2010 e comparação com modelos do geopotencial recentes. **Bol.Ciênc. Geod.** v.18. n.1, 2012.

MELO, L. F. S.; DE FREITAS, S.R.C. Avaliação de modelos globais do geopotencial para os estados do Maranhão e do Piauí. **Bol. Ciênc. Geod.** pp. 203-224. v.18. n.2, 2012.

MISITY, M.; MISITY, Y.; OPPENHEIM, G.; POGGI, J.M. **Wavelet Toolbox for use with MATLAB**. Mathworks, 1996. Disponível em < [web.mit.edu/1.130/WebDocs/wavelet\\_ug.pdf](http://web.mit.edu/1.130/WebDocs/wavelet_ug.pdf)> Acesso em 20/05/2011.

MOLODENSKY, M.S.; EREMEEV, V.F.; YURKINA, M.I. **Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth**. Translated from russian. Israel programme for scientific translations, 1962.

MONTECINO, H.; DE FREITAS, S.R.C. Strategies for Connecting Imbituba and Santana Brazilian Datums with Basis on Satellite Gravimetry and Residual Terrain Model. **IAGS 139 Earth on the Edge: Science for a Sustainable Planet**. Chris Rizos, Pascal Willis (Eds). Springer, 2012.

MORETTIN, P.A. **Ondas e Ondaletas. Da análise de Fourier à Análise de Ondaletas**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1999.

MORITZ, H. **Advanced Least-Square Methods. Reports of the Department of Geodetic Science – Report No. 175**. The Ohio State University: Columbus, 1972.

MORITZ, H. **Advanced Physical Geodesy**. Karlsruhe: Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe, 1980.

NAGY, D. The prism method for terrain corrections using digital computers. **Pure and applied geophysics**. pp. 31-39. v.63, 1966.

NAGY, D.; PAPP, G.; BENEDEK, J. The gravitational potential and its derivative for the prism. **Journal of Geodesy**. 2000, pp. 552-560, n.74.

NEGNEVITSKY, M. **Artificial Intelligence - A Guide to Intelligent Systems**. Harlow: Addison-Wesley, 2002, 2.<sup>a</sup> ed.

NGA **EGM2008 - WGS84 VERSION**. National Geospatial-Intelligence Agency. 2011. Disponível em <[http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/egm08\\_wgs84.html](http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/egm08_wgs84.html)> Acesso em 17/05/2011.

PAN, M.; SJOBERG, L.E. Unification of Vertical Datums by GPS and gravimetric geoid models with application to Fennoscandia. **Journal of Geodesy**. 1996. n.72, p.64-70.

PAVLIS, N. K.; HOLMES, S.A.; KENYON, S.C.; FACTOR, J. K. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). **Journal of Geophysical Research**. v.117, 2012.

PEREIRA, R.A.D. **Conexões das Redes Verticais Fundamentais do Brasil e da Argentina com base em números geopotenciais**. 159f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas). Universidade Federal do Paraná, 2009.

PEREIRA, R.A.D.; FREITAS, S.R.C.; **Aspectos críticos no cálculo de um geóide gravimétrico e alternativas de abordagem**. Seminário II (Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas). Universidade Federal do Paraná, 2010.

PEREIRA, R.A.D.; De FREITAS, S.R.C.; FERREIRA, V.G.; LUZ, R.T.; TIERRA CRIOLLO, A.R.; DEL COGLIANO, D.; FAGGION, P.L.; Dos SANTOS, D.P.; FAGGION, P.L. Evaluation of some interpolation techniques of gravity values in the region of Brazil-Argentine border. In: KENYON, S.C.; PACINO, M.C.; MARTI, J.U. **Geodesy for Planet Earth**. Springer, 2011.

PEREIRA, R.A.D.; MONTECINO, H.; DE FREITAS, S.R.C.; DALMOLIN, Q.; FERREIRA, V.G.; Determinação de Função Covariância Local para a predição de anomalias da gravidade Bouguer e valores da gravidade. **Boletim de Ciências Geodésicas**. 2011b.

PEREIRA, R.A.D.; GOMEZ, M.E.; DEL COGLIANO, D.; PEREIRA, R.A.D.; Avanços na conexão entre os data verticais do Brasil e da Argentina. **Sirgas Reunion, Concepción**, 2012.

PICK, M. On the calculation of the gravity terrain corrections in Czechoslovakia. **Studia Geophysica et Geodaetica**. pp. 131-144. n. 87. v. 31, 1987.

PLAG, H. P.; PEARLMAN, M. **Global Geodetic Observing System**. New York: Springer, 2009.

PRESS, W.; TEULKOLSKY, S.; VETTERLING, W.T.; FLANNERY, B. **Numerical Recipes in FORTRAN**. Cambridge University Press, 1992.

**SANSO, 2008** "The work of Torben Krarup" IAG News Letter

SANSÓ, F.; SONA, G. The challenge of computing the geoid in the nineties. **Surveys in Geophysics**. v.14, pp. 339-371, 1993.

SIDERIS, M.; FOTOPOULOS, G.; **Geoid Determination by FFT techniques**. Como: Department of Geomatics Engineering of University of Calgary, 2008.

SOLTANPOUR, A.; NAHAVANDCHI, H.; FEATHERSTONE, W.E. The use of second-generation wavelets to combine a gravimetric quasigeoid model with GPS-levelling data. **J Geod**. n.80, pp. 82-93, 2006.

STRANG, G.; NGUYEN, T. **Wavelets and Filter Banks**. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press, 1997. Rev. Ed.

SWELDENS, W.; SCHRÖDER, P. Building your own wavelets at home. **Wavelets in the Geosciences**. Berlim: Springer-Verlag Berlim Heidelberg, 2000.

TORGE, W. **Geodesy**. New York: W.de Gruyter, 2002.

TIERRA CRIOLLO, A. R. **Metodologia para a geração da malha de anomalias gravimétricas para obtenção de geóide gravimétrico local a partir de dados esparsos**. TESE (Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas). Universidade Federal do Paraná, 2003.

TIERRA CRIOLLO, A.; DE FREITAS, S.R.C. Artificial Neural Network: A Powerful Tool for Predicting Gravity Anomaly from Sparse Data. In: JEKELY, C.; BASTOS, L.; FERNANDES, J. **Gravity, Geoid and Space Missions**. Berlim: Springer, 2005. pp. 208-213.

TRAUTH, M. H. **Matlab Recipes for Earth Sciences**. Berlim: Springer Verlag, 2007.

TURCOTTE, D. L.; SCHUBERT, G. **Geodynamics**. New York: John Wiley & Sons, 1982.

VETTERLI, M.; KOVAČEVIĆ, J. **Wavelets and Subband Coding**. New Jersey: Prentice Hall PTR, 1995. Reissued by the authors, 2007. Disponível em <[http://www.waveletsandsubbandcoding.org/Repository/VetterliKovacevic95\\_Manuscript.pdf](http://www.waveletsandsubbandcoding.org/Repository/VetterliKovacevic95_Manuscript.pdf)>. Acesso em 11/03/2013.

WEEKS, M. **Digital Signal Processing using Matlab and Wavelets**. Hingham: Infinity Science Press LLC, 2007.

YLLDLZ, H. FORSBERG, R. AGREN, J., TSCHERNING, C.C., SJOBERG, L.E. Comparison of remove-compute-restore and least squares modification of Stokes' formula techniques to quasi-geoid determination over the Auvergne test area. **Journal of Geodetic Science**. 2(1), pp. 53-64, 2012.

ZHANG, K.; SHAOFENG, B.; SHEN, W. The singular integration of physical geodesy in the frequency domain. **Manuscripta Geodaetica**. n. 20, pp.241-247, 1995.

## 9. DOCUMENTOS CONSULTADOS

BEYLKIN, G. Wavelets and Fast Numerical Algorithms. **Lecture Notes for short course, AMS 93 – Proceedings of Symposia in Applied Mathematics**. v. 47, pp. 89-117, 1993. Disponível em <[http://www.cmap.polytechnique.fr/~peyre/cours/x2004tms/wavelets\\_fast\\_numerical.pdf](http://www.cmap.polytechnique.fr/~peyre/cours/x2004tms/wavelets_fast_numerical.pdf)>. Acesso em 08/04/2011.

BOYCE, W. E.; DiPRIMA, R.C.; **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

**DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA**. Disponível em <<http://w3.ualg.pt/~sjesus/aulas/pds/node46.html>>. Acesso em 12/05/2011.

FENGLER, M.J.; FREEDEN, W.; KOHLHAAS, A.; MICHEL, V.; PETERS, T. Wavelet modeling of regional and temporal variations of the earth's gravitational potential observed by Grace. **J. Geod.** 2007, n.81, pp. 5-15.

esa goce. **The first of a series**. European Space Agency. Disponível em <[http://www.esa.int/SPECIALS/GOCE/SEMOM2VHJCF\\_0.html](http://www.esa.int/SPECIALS/GOCE/SEMOM2VHJCF_0.html)> Acesso em 18/05/2011.

esa earthnet online. **Goce data overview**. European Space Agency. Disponível em <[http://www.esa.int/SPECIALS/GOCE/SEMOM2VHJCF\\_0.html](http://www.esa.int/SPECIALS/GOCE/SEMOM2VHJCF_0.html)> Acesso em 18/05/2011.

GRACE. **Gravity Recovery and Climate Experiment**. The University of Texas at Austin. Disponível em <<http://www.csr.utexas.ed/grace/>>. Acesso em 03/05/2011.

MEYER, D. **ASTER Global Digital Elevation Model Version 2 - Summary of Validation Results**. 2011. Disponível em <[http://www.jspacesystems.or.jp/ersdac/GDEM/ver2Validation/Summary\\_GDEM2\\_validation\\_report\\_final.pdf](http://www.jspacesystems.or.jp/ersdac/GDEM/ver2Validation/Summary_GDEM2_validation_report_final.pdf)>, Acesso em 26/03/2013.

SCHMIDT, M.; FABERT, O. Elipsoidal wavelet **representation** of the gravity field. **Report No. 487**. Columbus: The Ohio State University, 2008.

SCHWARZ, K. P. Data types and their spectral properties. In: K.P. Schwarz, **Local Gravity Field Approximation**. University of Calgary: Calgary, 1985.

SIDERIS, M. **Geoid Determination by FFT techniques**. Disponível em <<http://portal.survey.ntua.gr/main/courses/general/sigproc/files/SiderisFotopoulosPresentation.pdf>> Acesso em 20/05/2011.

VIDAKOVIC, B.; MÜLLER, P. **Wavelets for kids**. 1991 Disponível em <<http://www.diku.dk/hjemmesider/ansatte/jda/biosignal/kidsA.pdf>>, Acesso em 15/05/2011.

MEISSL, P. The Use of Finite Elements in Physical Geodesy. **Reports of the Department of Geodetic Science – Report No. 313**. The Ohio State University: Columbus, 1981



## 10. APÊNDICE A

```
%Extração de informações do ICGEM e Processamento wavelet no MATLAB
%Programado por Rogers Ademir Drunn Pereira
%20/11/2012.
%-----
%Carrega dados de uma lista do ICGEM sem cabeçalho
ListaAnoHeight=load('egm2008SCABEC512.gdf','-ascii');

contador2=1;

for i=512:-1:1
    for j=1:1:512

        AnoHeight(i,j)=ListaAnoHeight(contador2,4);
        contador2=contador2+1;

    end;
end;

%-----
%Plota os dados em uma imagem com os shapefiles s,t e u
ZMat=AnoHeight;

s=shaperead('America_do_Sul.shp','UseGeoCoords',true);
t=shaperead('Brasil.shp','UseGeoCoords',true);
u=shaperead('Lagos_Lagoas.shp','UseGeoCoords',true);

%Vetor contendo [ncelulas por grau lat + ao norte long + a oeste]
LATNOR=-26;
LATSOU=-34.516666663260
LONWES=302;
LONEAS=310.51666666326

V=[60 LATNOR LONWES];

figure

%Apresenta o mapa com a Matriz desejada

% geoshow(s,'DisplayType','line')

axesm('cassinistd','MapLatLimit',[LATSOU LATNOR],...
      'MapLonLimit',[LONWES LONEAS],...
      'MLineLocation',2,'PLineLocation',2,'MeridianLabel','on',...
      'ParallelLabel','on')

%MlineLocation e PLineLocation dá o intervalo de apresentação das linhas de
%grade
```

```

framem;
gridm;
axis on;

geoshow(s,'DisplayType','line');
geoshow(t,'DisplayType','line'),hold on;
geoshow(u,'DisplayType','line'),hold on;

geoshow(ZMat,V,'DisplayType','texturemap');
grid on;

% Projeção auxiliar - não utilizada
% axesm('MapProjection','mercator','MapLatLimit',[-33 -28],...
%       'MapLonLimit',[309 303])

colorbar;

%geoshow(landareas,'EdegeColor',[0.6 0.6 0.6])
%-----
%Decomposição em Wavelets de Daubechies (de 1 Nível)

[cA1,cH1,cV1,cD1]=dwt2(ZMat,'db2'); %P.2.68

%-----
% Exibição da Aproximação cA1

%Vetor contendo [ncelulas por grau lat + ao norte long + a oeste]
M=[30.05866667 LATNOR LONWES]
figure
%Apresenta o mapa com a Matriz desejada
% geoshow(s,'DisplayType','line')
axesm('cassinistd','MapLatLimit',[LATSOU LATNOR],...
      'MapLonLimit',[LONWES LONEAS],...
      'MLineLocation',2,'PLineLocation',2,'MeridianLabel','on',...
      'ParallelLabel','on')
%MlineLocation e PLineLocation dá o intervalo de apresentação das linhas de
%grade
framem;
gridm;
axis on

geoshow(s,'DisplayType','line')
geoshow(t,'DisplayType','line'),hold on
geoshow(u,'DisplayType','line'),hold on

%cA1 - Aproximações; M - Novo vetor de resolução e do canto
geoshow(cA1,M,'DisplayType','texturemap')
grid on
colorbar
%-----
% Exibição da dos Detalhes Horizontais cH1
figure
%Apresenta o mapa com a Matriz desejada
% geoshow(s,'DisplayType','line')
axesm('cassinistd','MapLatLimit',[LATSOU LATNOR],...
      'MapLonLimit',[LONWES LONEAS],...
      'MLineLocation',2,'PLineLocation',2,'MeridianLabel','on',...
      'ParallelLabel','on')

```

```

%MlineLocation e PlineLocation dá o intervalo de apresentação das linhas de
%grade
framem;
gridm;
axis on

geoshow(s,'DisplayType','line')
    geoshow(t,'DisplayType','line'),hold on
    geoshow(u,'DisplayType','line'),hold on

    %cH1 - Detalhes Horizontais; M - Novo vetor de resolução e do canto
    geoshow(cH1,M,'DisplayType','texturemap')
grid on
colorbar
%-----
% Exibição da dos Detalhes Verticais cV1
figure
%Apresenta o mapa com a Matriz desejada
% geoshow(s,'DisplayType','line')
axesm ('cassinistd','MapLatLimit',[LATSOU LATNOR],...
        'MapLonLimit',[LONWES LONEAS],...
        'MlineLocation',2,'PlineLocation',2,'MeridianLabel','on',...
        'ParallelLabel','on')
%MlineLocation e PlineLocation dá o intervalo de apresentação das linhas de
%grade
framem;
gridm;
axis on

geoshow(s,'DisplayType','line')
    geoshow(t,'DisplayType','line'),hold on
    geoshow(u,'DisplayType','line'),hold on

    %cV1 - Detalhes Verticais; M - Novo vetor de resolução e do canto
    geoshow(cV1,M,'DisplayType','texturemap')
grid on
colorbar
%-----
% Exibição da dos Detalhes Diagonais cD1
figure
%Apresenta o mapa com a Matriz desejada
% geoshow(s,'DisplayType','line')
axesm ('cassinistd','MapLatLimit',[LATSOU LATNOR],...
        'MapLonLimit',[LONWES LONEAS],...
        'MlineLocation',2,'PlineLocation',2,'MeridianLabel','on',...
        'ParallelLabel','on')
%MlineLocation e PlineLocation dá o intervalo de apresentação das linhas de
%grade
framem;
gridm;
axis on

geoshow(s,'DisplayType','line')
    geoshow(t,'DisplayType','line'),hold on
    geoshow(u,'DisplayType','line'),hold on

    %cD1 - Detalhe Diagonal; M - Novo vetor de resolução e do canto
    geoshow(cD1,M,'DisplayType','texturemap')
grid on
colorbar

```

```

%-----
% Transformação Inversa utilizando cA1,cH1,cV1,cD1.
% Recomposição do sinal

EGM2008Recon=idwt2(cA1,cH1,cV1,cD1,'db2');
size(EGM2008Recon)

%-----
% Exibição da Reconstrução EGM2008Recon
figure
%Apresenta o mapa com a Matriz desejada
% geoshow(s,'DisplayType','line')
axesm('cassinistd','MapLatLimit',[LATSOU LATNOR],...
      'MapLonLimit',[LONWES LONEAS],...
      'MLineLocation',2,'PLineLocation',2,'MeridianLabel','on',...
      'ParallelLabel','on')
%MLineLocation e PLineLocation dá o intervalo de apresentação das linhas de
%grade
framem;
gridm;
axis on

geoshow(s,'DisplayType','line')
    geoshow(t,'DisplayType','line'),hold on
    geoshow(u,'DisplayType','line'),hold on

    %EGM2008Recon - Rec. do EGM2008;
    %V - Vetor original de resolução e do canto
    geoshow(EGM2008Recon,V,'DisplayType','texturemap')
grid on
colorbar

%-----
% Subtração: Grade Original (EGM2008) e Reconstruída (EGM2008Recon)
% Matriz de Resíduos

Resid=ZMat-EGM2008Recon;

%-----
% Exibição da Matriz de Resíduos

figure
%Apresenta o mapa com a Matriz desejada
% geoshow(s,'DisplayType','line')
axesm('cassinistd','MapLatLimit',[LATSOU LATNOR],...
      'MapLonLimit',[LONWES LONEAS],...
      'MLineLocation',2,'PLineLocation',2,'MeridianLabel','on',...
      'ParallelLabel','on')
%MLineLocation e PLineLocation dá o intervalo de apresentação das linhas de
%grade
framem;
gridm;
axis on

geoshow(s,'DisplayType','line')
    geoshow(t,'DisplayType','line'),hold on
    geoshow(u,'DisplayType','line'),hold on

    %Resid - Dif. entre as grades originais e reconstruídas

```

```
%V - Vetor Original de Resolução e Canto
geoshow(Resid,V,'DisplayType','texturemap')
grid on
colorbar

%-----
```

## 11. APÊNDICE B

```
% Rotina para transformação do formato GRAVSOFT para formato imagem MATLAB-
% Desenvolvido por Rogers Ademir Drunn Pereira (04/12/2012)
% Limpando as variáveis-----
clc
clear
% Carregando dados formato gravsoft para o Matlab-----

DADOS=fopen('RTM250.gri');
[B,count]=fscanf(DADOS,'%f',inf);
fclose(DADOS);

tam=size(B);

% Extração dos cantos da quadrícula (cabeçalho do arquivo)-----
-
LatSOU=B(1,1);
LatNOR=B(2,1);
LonWES=B(3,1);
LonEAS=B(4,1);
ResLAT=B(5,1);
ResLON=B(6,1);

% Extrai o cabeçalho do arquivo-----
-
C=B(7:tam(1,1));

% nlins=floor(((LonEAS-LonWES)/ResLON)+1);
% ncols=floor(((LatNOR-LatSOU)/ResLAT)+1);
nlins=512
ncols=512

cont=1
C(cont)
Zmat(1,1)=1

for i=1:ncols
    for j=1:nlins

        Zmat(i,j)=C(cont);

        cont=cont+1;
    end
end

%Carregando imagem do gravsoft-----
-
image(Zmat,'CDataMapping','scaled')
colorbar
grid on
```

## 12.APÊNDICE C

```
% Universidade Federal do Paraná
% Lab.de Referenciais Geodésicos e Altimetria por Satélites - LARAS
% Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas
% -----
% Programa para o cálculo da Correção do Terreno
% Janela móvel e varredura desenvolvida por Jorge Centeno
% F. modif. p/ o cálculo de Correções. do Terreno p/ Rogers A D Pereira
% -----

tic
clear

% Carregando arquivo de altitudes na forma de imagem-----
tic

XYZ=imread('Tudo4.tif');

toc
% Número de linhas e de colunas da grade a utilizar mais canto SW-----
LatS=-35; %
LonW=-58; %
nlin=1080;
ncol=1080;

H=XYZ;

% vizinhanca 3x3, 5x5,
% defina 1 lado ex:4 (janela = 4+1+4=9)
% q é o tamanho da janela em pixels

% Tamanho da janela em torno do ponto que deve ser integrada-----
% Se q=5 e resolução=2000m, então o raio de integração será 10000m-----
-
q=50;
lado=q*2+1;

% Criando a matriz J que armazenará a CT e preenchendo-a com zeros-----
J=zeros(nlin, ncol);

% Densidade e Constante Gravitacional-----
ro=2670; % [kg/m3]-----
G=6.67e-11; % [m3/(kg.s2)]-----

% Resolução =~ 925m =~ 1000 m-----
-
resol=925; % Resolução em m
res=0.008333333; % Resolução na unidade de LatN e Lon (G.Decimais)

% Valor constante no produto da Correção do Terreno-----
cte=0.5*ro*G*resol^2*1e5 ; % 1e5 - Para passar de m/s2 para mGal-----
-
```

```

format long e
% Início do laço for que varre toda a matriz-----
% q+1 | nlin-q-1 | ncol-q-1 - Eliminam efeito de borda-----
for i=q+1: nlin-q-1
    for j=q+1: ncol-q-1
        s=0;
        % Janela onde será feita a integração -----
        for ii=i-q:i+q
            for jj=j-q:j+q

                % Resolução multiplicada para passar de "pixel" para m----
                % Cálculo da distância ao cubo-----
                d3=(resol*sqrt((ii-i)^2 + (jj-j)^2 ))^3;

                % ne e eq servem para contornar a singularidade-----

                Numerador=double((H(ii,jj)-H(i,j))^2);
                Denom=double(d3);
                sc= (real(ne(d3,0))*...
                    (Numerador/...
                     (Denom + (1*real(eq(d3,0))) )));

                % Somatório de todos os pontos na janela-----
                s=sc+s;

            end

        end

        % Produto do somatório pelas constantes-----
        v=cte*s;
        % Armazenando o resultado na matriz J-----
        J(i,j)=v;

    end

    % Avaliação do progresso de cálculo-----
    % if mod(i,10)==0

        linha_calculada=i
        toc
    % end

end

% Escalonamento e plotagem das altitudes-----
caxis;
image(H, 'CDataMapping', 'scaled');
colorbar;
colormap(summer);
grid on;
save H
% Escalonamento e plotagem das TC-----

```



```

-
figure;
caxis;
image(J,'CDataMapping','scaled');
colorbar;
colormap(jet);
grid on;
save J
% Visualização das TC em 3D-----
figure;
surf(J);
set(surf(J),'edgecolor','none');
colorbar;
toc

save('TC.txt','J','-ascii','-double','-tabs');

% % Transformação dos dados calculados em uma lista- Opcional-----
% tic
% for i=1:nlin
%     for j=1:ncol
%         Arq(ncol*(i-1)+j,1)=LatS-(i-1)*res;
%         Arq(ncol*(i-1)+j,2)=LonW+(j-1)*res;
%         Arq(ncol*(i-1)+j,3)=J(i,j);
%         Arq(ncol*(i-1)+j,4)=H(i,j);
%     end
% if mod(i,20)==0
%     trasnf_lista_perc=(i/nlin)*100
% end
% end
% toc
% save('TClst.txt','Arq','-ascii','-double','-tabs');

```

### 13. APÊNDICE D

```
% Cálculo do Efeito RTM - Abordagem Rogers
% Solução <<<INSTÁVEL>>>
%-----
clc
clear

%Extração de altitudes do Modelo - Resolução espacial = 900 m
%Programado por Rogers Ademir Drunn Pereira
%15/02/2012
%-----
%Carrega dados geotiff de uma matriz de dados reamostrada para 900 m
Altitudes_Prisma=imread('Alt_prismas.tif');
Alt=double(Altitudes_Prisma);

%-----
%Plota os dados em uma imagem com os shapefiles s,t e u
ZMat=flipud(Alt);

s=shaperead('America_do_Sul.shp','UseGeoCoords',true);
t=shaperead('Brasil.shp','UseGeoCoords',true);
u=shaperead('Lagos_Lagoas.shp','UseGeoCoords',true);

%Vetor contendo [ncelulas por grau lat + ao norte long + a oeste]
LATNOR=-26.0;
LATSOU=-34.0
LONWES=302.0;
LONEAS=311.0;

V=[120 LATNOR LONWES];

figure

%Apresenta o mapa com a Matriz desejada

% geoshow(s,'DisplayType','line')

axesm ('cassinistd','MapLatLimit',[LATSOU LATNOR],...
        'MapLonLimit',[LONWES LONEAS],...
        'MLineLocation',2,'PLineLocation',2,'MeridianLabel','on',...
        'ParallelLabel','on')

%MlineLocation e PLineLocation dá o intervalo de apresentação das linhas de
%grade

framem;
gridm;
axis on;

geoshow(s,'DisplayType','line');
```

```

geoshow(t, 'DisplayType', 'line'), hold on;
geoshow(u, 'DisplayType', 'line'), hold on;

geoshow(ZMat, V, 'DisplayType', 'texturemap');
grid on;

colormap(demcmap(ZMat, 86));

colorbar;

%geoshow(landareas, 'EdgeColor', [0.6 0.6 0.6])
%-----
% Cálculo do Potencial de cada prisma via T. Clássica do Potencial

H=ZMat;
nlin=1080;
ncol=1080;

% Tamanho da janela em torno do ponto que deve ser integrada-----
% Se q=5 e resolução=2000m, então o raio de integração será 10000m-----
q=171;
lado=q*2+1;

% Criando a matriz J que armazenará a CT e preenchendo-a com zeros-----
J=zeros(nlin, ncol);

% Densidade e Constante Gravitacional-----
ro=2670;           % [kg/m3]-----
G=6.67e-11;        % [m3/(kg.s2)]-----

% Resolução =~ 925m =~ 1000 m-----
resol=925;         % Resolução em m
res=0.008333333;   % Resolução na unidade de LatN e Lon
% Valor constante no produto da Correção do Terreno-----
%
%          G m1 dm          G rho V1 dV2          G rho (A*H1) 1
%V=Int----- = Int----- = Int-----
%          d              d              d
%
%
%          (G rho lado^2) H1 1 )          (H1)
%V=Sum( -----) = G rho lado^2 sum -----
%          d              d
%
cte=ro*G*resol^2 ;

tic
format long e

%Informações do Sistema de Referência-----

a=6378137;          % [m]
f=1/298.257222101;  % [1/m]
equa=2*f-(f^2);     % [ ]
b=6356752.3141404;  % [m]
gamaa=9.78032677150; % [m/s2]

```

```

gamab=9.83218636850;      %[m/s2]
%Rmed=6378137;           %[m]

% Início do laço for que varre toda a matriz-----
% q+1 | nlin-q-1 | ncol-q-1 - Eliminam efeito de borda-----
for i=q+1: nlin-q-1
    for j=q+1: ncol-q-1
        s=0;

        %Latitude do Ponto de Cálculo-----
        LatPtoCalc=deg2rad(LATSOU+res*(i-1));
        LonPtoCalc=deg2rad(LONWES+res*(j-1));
        %Gravidade normal do ponto de cálculo-----
        Ngncalc=a*gamaa*(cos(LatPtoCalc)^2)+b*gamab*(sin(LatPtoCalc)^2);
        Dgncalc=((a^2)*(cos(LatPtoCalc)^2)+(b^2)*(sin(LatPtoCalc)^2))^0.5;
        gnormal=(Ngncalc/Dgncalc);

        % Janela onde será feita a integração -----
        for ii=i-q:i+q
            for jj=j-q:j+q

                % Resolução multiplicada para passar de "pixel" para m-----
                % Cálculo da distância-----
                d=(resol*sqrt((ii-i)^2 + (jj-j)^2 ));

                % Contorno da singularidade no ponto estação-----
                %if d3==0
                %p=(H(i,j))/6371000;
                %scontorno=4*pi*H(i,j)*(p+(p^2)/3);
                %sc=0;
                %else
                % (H-hp)^2/d3-----
                Numerador=double((H(ii,jj) * 1 ));
                Denom=double(d);
                sc= (real(ne(d,0))*...
                    (Numerador/...
                    (Denom + (1*real(eq(d,0))) ) ));
                %
                %
                nf=ne(d3,0);
                er=eq(d3,0);
            %end
            % Somatório de todos os pontos na janela-----
            s=sc+s;

            % Determinação de números indefinidos NaN no somatório-----
            % if isnan(s)
            %     falcatrua=100
            % end

        end

    end

end

% Produto do somatório pelas constantes-----

```

```

v=cte*s*(1/gnormal);
% Armazenando o resultado na matriz J-----
J(i,j)=v;

end

% Avaliação do progresso de cálculo-----
if mod(i,10)==0

    linha_calculada=i
    toc
end

end

% Plotagem dos resultados-----
figure

axesm ('cassinistd','MapLatLimit',[LATSOU LATNOR],...
        'MapLonLimit',[LONWES LONEAS],...
        'MLineLocation',2,'PLineLocation',2,'MeridianLabel','on',...
        'ParallelLabel','on')

%MlineLocation e PLineLocation dá o intervalo de apresentação das linhas de
%grade

framem;
gridm;
axis on;

s=shaperead('America_do_Sul.shp','UseGeoCoords',true);
t=shaperead('Brasil.shp','UseGeoCoords',true);
u=shaperead('Lagos_Lagoas.shp','UseGeoCoords',true);

geoshow(s,'DisplayType','line');
geoshow(t,'DisplayType','line'),hold on;
geoshow(u,'DisplayType','line'),hold on;

geoshow(J,V,'DisplayType','texturemap');
grid on;

% -----

```

## 14. APÊNDICE E

Considere-se o potencial gravitacional de atração de uma massa  $m$  relativamente a um ponto de massa unitária e distante  $d$  da massa  $m$ , em uma primeira aproximação dado por:

$$V_{RTM} = \int_m \frac{G}{d} dm \quad (\text{AE 01})$$

se a massa  $m$  puder ser avaliada em termos de sua densidade e volume, a equação anterior fica

$$V = \int_V \frac{G\rho}{d} dV \quad (\text{AE 02})$$

que, em termos discretos pode ser avaliada como

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{G\rho}{d} \Delta V_i \quad (\text{AE 03})$$

se o elemento em questão for um prisma, então  $\Delta V$  é um elemento volumétrico dado por  $a \times b \times H$ .  $\rho$  é a densidade média do elemento e  $n$  é o número total de prismas que compõe as massas relativamente ao ponto onde deseja-se avaliar o potencial. Abaixo (Figura AE01) apresenta-se a situação volumétrica dos prismas  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_7$ , cuja notação  $a, b, h_5$  se refere às dimensões do volume do prisma  $P_5$  e  $d$  à distância até o prisma  $P_7$ .  $P_{\text{cálculo}}$  é o ponto onde deseja-se avaliar o potencial gravitacional.

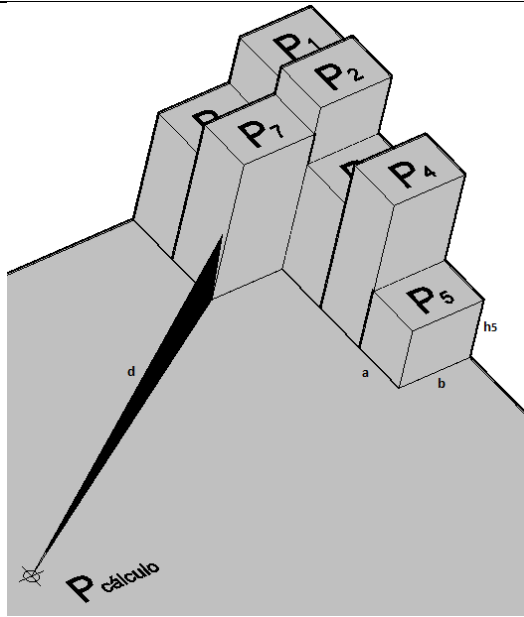


Figura AE01 - Prismas relativamente ao ponto de cálculo.

A figura anterior representa uma situação análoga à representação matricial tradicionalmente empregada na análise de sinais. Como  $a$  e  $b$  representam o tamanho do elemento digital utilizado na análise (*pixel*) e, este valor é constante, pode-se empregar a expressão (AE 03) para a integração numérica de (AE 01):

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{G\rho}{d} a \cdot b \cdot H_i = G\rho \cdot a \cdot b \sum_{i=1}^n \frac{1}{d} \cdot H_i \quad (\text{AE 04})$$

e, considerando-se que a resolução é constante, então é possível escrever:

$$V = cte \sum_{i=1}^n \frac{1}{d} \cdot H_i; \quad cte = G\rho \cdot res^2 \quad (\text{AE 05})$$

em que  $res^2$  é a área do pixel utilizado.

Dividindo-se ambos os lados pela gravidade normal do ponto de cálculo, tem-se, por fim,

$$\frac{V}{\gamma} = cte \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma d} \cdot H_i; \quad cte = G\rho \cdot res^2 \quad (\text{AE 06})$$

Que, associado ao Teorema de Bruns (HEISKANEN & MORITZ, 1967) pode ser convertido no sinal que compõe os *detalhes* para uma fusão baseada em *wavelets*.

## 15. APÊNDICE F

```
% Universidade Federal do Paraná
% Laboratório de Referenciais Geodésicos e Altimetria por Satélites -
% LARAS
% Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas
% -----
-
% Programa para o cálculo da Integral de Stokes via Janela Móvel.
% Janela móvel e varredura desenvolvida por Jorge Centeno
% Função modif. p/ a Int. Pizetti-Stokes p/ Rogers A D Pereira
% -----
-

tic
clear

% Número de linhas e de colunas da grade a utilizar + canto da grade-----
-
LatS=-34; %
LonW=-58; %
nlin=421;
ncol=541;

% Carregando arquivo de dados 'data.txt'-----
-
Arq1=load('Ano_FA_Residual.dat','-ascii');
xx=1
for i=1:nlin
    for j=1:ncol
        AnoFAresid(i,j)=Arq1(xx,3);
        xx=xx+1
    end
end
% Matriz de Correções do Terreno-----
-
tic
%
% TC=load('TC.txt');
XYZ=flipud(AnoFAresid)*1e-5; %1e-5 para compatibilização com SI.

toc

% Criando uma matriz H=(nlinxcol) e preenchendo com zeros-----
-
% H=zeros(nlin,ncol);
H=XYZ;

% vizinhanca 3x3, 5x5,
% defina 1 lado ex:4 (janela = 4+1+4=9)
% q é o tamanho da janela em pixels

% Tamanho da janela em torno do ponto que deve ser integrada-----
-
% Se q=5 e resolução=2000m, então o raio de integração será 10000m-----
-
q=50;
lado=q*2+1;
```



```

% Criando a matriz J que armazenará a CT e preenchendo-a com zeros-----
-
J=zeros(nlin, ncol);

% Resolução =~ 925m =~ 1000 m-----
-
resol=1850;                % Resolução em m
res=0.0166666667;          % Resolução na unidade de LatN e Lon

%Informações do Sistema de Referência-----
-

a=6378137;                  % [m]
f=1/298.257222101;          % [1/m]
equa=2*f-(f^2);             % [ ]
b=6356752.3141404;          % [m]
gamaa=9.78032677150;        % [m/s^2]
gamab=9.83218636850;        % [m/s^2]
%Rmed=6378137;              % [m]

format long e
% Início do laço for que varre toda a matriz-----
-
% q+1 | nlin-q-1 | ncol-q-1 - Eliminam efeito de borda-----
-
for i=q+1: nlin-q-1
    for j=q+1: ncol-q-1

        %Latitude do Ponto de Cálculo-----
        -
        LatPtoCalc=deg2rad(LatS+res*(i-1));
        LonPtoCalc=deg2rad(LonW+res*(j-1));
        %Gravidade normal do ponto de cálculo-----
        -
        Ngncalc=a*gamaa*(cos(LatPtoCalc)^2)+b*gamab*(sin(LatPtoCalc)^2);
        Dgncalc=((a^2)*(cos(LatPtoCalc)^2)+(b^2)*(sin(LatPtoCalc)^2))^0.5;
        gnormal=(Ngncalc/Dgncalc);

        %Raio médio do ponto de cálculo-----
        -
        RSTM=a/((1-equa*(sin(LatPtoCalc))^2)^0.5);
        RSM=a*(1-equa)/((1-equa*(sin(LatPtoCalc))^2)^1.5);
        Rmed=(RSTM*RSM)^0.5;
        Area_Integ=resol^2;
        sur=((Area_Integ)/pi)^0.5;
        N=0;

        % Janela onde será feita a integração -----
        -
        for ii=i-q:i+q
            for jj=j-q:j+q

                LatPtoAno=deg2rad(LatS+res*(i-q-1));

```

```

LonPtoAno=deg2rad(LonW+res*(j-q-1));

% Cálculo da FStokes-----
-
cospsi=sin(LatPtoCalc)*sin(LatPtoAno)+...
    cos(LatPtoCalc)*cos(LatPtoAno)*...
    cos(LonPtoAno-LonPtoCalc);
psi=acos(cospsi);
%-----
-
% Cálculo da função S de Stokes-----
-
Spsi=(1/sin(0.5*psi))+1-6*sin(0.5*psi)-...
    5*cos(psi)-3*(cos(psi))*...
    log((sin(0.5*psi))+((sin(0.5*psi))^2));

% Contorno da integração sobre o próprio ponto-----
-

d=((i-ii)^2)+((j-jj)^2)^0.5;

% Cálculo da altura geoidal
Np=(real(ne(d,0))*(1/(4*(pi*gnormal)*Rmed)))*...
    (H(ii,jj))*(Spsi)*cos(LatPtoAno)*Area_Integ)+...
    (real(eq(d,0))*(1/gnormal)*sur*H(i,j));

% Nr(ii,jj)=Np; % Verificação submatriz um único ponto
% Somatório de todos os pontos da janela-----
-

N=Np+N;

    end

end

% Armazenando o resultado na matriz J-----
-

J(i,j)=N;

end

% Avaliação do progresso de cálculo-----
-

linha_calculada=i
toc

end

% Escalonamento e plotagem das Correções do Terreno-----
-
caxis;
image(H,'CDataMapping','scaled');
colorbar;

```

```

colormap(summer);
grid on;
save H
% Escalonamento e plotagem das Alturas Geoidais-----
-
figure;
caxis;
image(J,'CDataMapping','scaled');
colorbar;
colormap(jet);
grid on;
save J
% Visualização da ondulação geoidal-----
-
figure;
surf(J);
set(surf(J),'edgecolor','none');
colorbar;
toc

save('TC.txt','J','-ascii','-double','-tabs');

% Transformação dos dados calculados em uma lista-----
tic
for i=1:nlin
    for j=1:ncol
        Arq(ncol*(i-1)+j,1)=LatS+(i-1)*res;
        Arq(ncol*(i-1)+j,2)=LonW+(j-1)*res;
        Arq(ncol*(i-1)+j,3)=J(i,j);
        Arq(ncol*(i-1)+j,4)=H(i,j);
    end
    if mod(i,20)==0
        trasnf_lista_perc=(i/nlin)*100
    end
end
toc
save('Geoidlist.txt','Arq','-ascii','-double','-tabs');

```

## 16. APÊNDICE G

```

tic
clc
clear
% UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
% LABORATÓRIO DE REFERENCIAIS GEODÉSICOS E ALTIMETRIA POR SATÉLITES
% -----
% Cálculo dos Parâmetros da Função Covariância a partir de observações de
% anomalia da gravidade
% Formato de entrada:
% [Lat Lon Ano]
% Neste programa cada anomalia é subtraída da média das anomalias para o
% início do cálculo da função covariância empírica.

% Programa OK - Última atualização: 18/06/2013 - 10h19min
%-----
% Raio da Esfera de Bjerhammar
R=1; % Foi utilizada a distância angular;

%-----
% Carregando elementos de entrada
% Mudar o nome do arquivo de entrada. Retirar os zeros entre linhas.
entrada=load('Gravity_Anomaly_Rogers_t2.txt', '-ASCII');
tam=size(entrada);

%-----
% Extração dos elementos necessários

% Cálculo da Matriz de distâncias-----
for i=1:tam
    for j=1:tam
        Lat1=deg2rad(entrada(i,1));
        Lon1=deg2rad(entrada(i,2));
        Lat2=deg2rad(entrada(j,1));
        Lon2=deg2rad(entrada(j,2));

        % Cálculo da distância
        distang=((Lat2-Lat1)^2+(Lon2-Lon1)^2)^.5;
        dist1=R*distang;
        dist(i,j)=dist1;
    end
end

% Média Quadrática das Anomalias-----
%-----
% Ordenando os pontos tomando como referência a distância a partir do ponto
% número 1 da lista

DADOINIT=[dist(:,1) entrada(:,3)];

%Cálculo da Anomalia da Gravidade Média-----
AnoMedia=mean(entrada(:,3));

%Extração da média de todas as anomalias da gravidade-----
Anosemmedia=entrada(:,3)-AnoMedia;

```

```

%Reorganização dos dados sem a média-----
DADOINIT(:,2)=Anosemmedia;

%Organização dos dados para o início do cálculo da Função Covariância-----
DADO_ORD=sortrows(DADOINIT,1);

for r=1:tam
    for s=1:tam
        if (r+s-1)>tam(1)
            MatProd(r,s)=0;
        else
            MatProd(r,s)=DADO_ORD(r,2).*DADO_ORD((r+s-1),2);
        end
    end
end

%-----
% Cálculo da média dos produtos de anomalias -> O Matlab considera os zeros
% na média -----

% Cálculo do número de zeros nas colunas

MatProd==0;
NumZeros=ans;
SomaZeros=sum(NumZeros);
NElementosCol=ones(1,tam)*tam(1)-SomaZeros(1,:);

% Soma de cada coluna-----
SumColuna=sum(MatProd);

% Cálculo da Média-----
COV=(SumColuna(1,:))./(NElementosCol);

% Transposição dos dados e armazenamento da matriz DADO_ORD-----
COV=COV';
DADO_ORD(:,1)=DADO_ORD(:,1)*180/pi;
DADO_ORD(:,3)=COV;

% Plotagem da função covariância-----
figure
plot(DADO_ORD(:,1),DADO_ORD(:,3));
grid

% Fim do Programa-----
toc

% Salvando variáveis X e Y para o "fitting" de uma função qualquer-----
% Ajustamento realizado utilizando a Toolbox "cftool" do Matlab.

Distance=DADO_ORD(:,1);
Covariance=DADO_ORD(:,3);
grid on

% Toolbox do Matlab para escolha da função a ser ajustada (se disponível)
cftool(Distance,Covariance);
grid on

```

## 17. APÊNDICE H

Datum	Estação	Long (GD)	Lat (GD)	Grav. (mgal) observada	H nivelada Oficial (m)	h elipsoidal (m)	$\Delta H$ Utilizado (m)	Número Geopotencial (m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	dW (m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	dW (m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ) Ajustado	Sentido	dgravidade (mGal)	H dinâmica (m)	Dif Hdin-Hoficial (m)
DVB-I	RN UFPR 08/10	-28.631492417	-55.999026306	979178.5480	66.7335	77.8657		659.2445						
DVB-I	RN1923U	-28.644043808	-56.015259683	979186.8991	79.5261	90.7871	12.7926	784.5076	125.2630	125.1391	RN UFPR 08/10 => RN1923U	8.3511	80.1142	0.5881
DVB-I	RN1922M	-28.660270986	-56.006286700	979184.0561	93.4946	104.8488	13.9685	921.2851	136.7775	136.6536	RN1923U => RN1922M	-2.8430	94.0819	0.5873
DVB-I	RN1922J	-28.662984381	-55.999985761	979184.6511	91.8372	103.0726	-1.6574	905.0561	-16.2290	-16.1051	RN1922M => RN1922J	0.5950	92.4246	0.5874
DVB-I	RN1922N	-28.683462897	-55.994677958	979186.4977	86.8213	98.0136	-5.0159	855.9411	-49.1150	-48.9911	RN1922J => RN1922N	1.8466	87.4090	0.5877
DVB-I	RN1922U	-28.842672250	-56.075432742	979203.5879	78.9683	90.4908	-7.8530	779.0449	-76.8962	-76.7723	RN1922N => RN1922U	17.0902	79.5563	0.5880
DVB-I	RN1922X	-28.900971264	-56.090946767	979212.6394	77.4708	88.9807	-1.4975	764.3813	-14.6636	-14.5397	RN1922U => RN1922X	9.0514	78.0588	0.5880
DVB-I	RN1923M	-29.163114486	-56.381655281	979236.3252	84.7069	97.226	7.2361	835.2389	70.8577	70.7338	RN1922X => RN1923M	23.6858	85.2949	0.5880
DVB-I	RN1923R	-29.166691072	-56.488732386	979243.2831	68.3035	81.04	-16.4034	674.6103	-160.6286	-160.5047	RN1923M => RN1923R	6.9579	68.8914	0.5879
DVB-I	RN1931C	-29.169498608	-56.547537111	979242.9286	62.2421	75.039	-6.0614	615.2545	-59.3558	-59.2319	RN1923R => RN1931C	-0.3545	62.8300	0.5879
DVB-I	RN1923T	-29.142143133	-56.536288811	979242.2236	63.8743	76.673	1.6322	631.2377	15.9832	15.8593	RN1931C => RN1923T	-0.7050	64.4622	0.5879
DVB-I	RN1931B	-29.140662628	-56.547220483	979240.6058	66.9833	80.756	3.1090	661.6823	30.4446	30.3207	RN1923T => RN1931B	-1.6178	67.5712	0.5879
DVB-I	RN1923X	-29.130851064	-56.546552467	979238.5149	79.1996	92.056	12.2163	781.3091	119.6268	119.5303	RN1931B => RN1923X	-2.0909	79.7875	0.5879
DVB-I	RN1931A	-29.121996881	-56.556541981	979243.1117	58.4215	71.2829	-20.7781	573.8621	-203.4676	-203.3711	RN1923X => RN1931A	4.5969	58.6030	0.1815
DVB-I	RN8935	-29.117985033	-56.554728989	979243.5049	51.6230	64.443	-6.7985	507.2882	-66.5739	-66.4773	RN1931A => RN8935	0.3932	51.8044	0.1814
DVA-MDP	Ponto Alvear (Vante)	-29.113145189	-56.555326631	979243.7799	52.2344	65.5792	0.0386	507.6661	0.3779	0.2814	RN8935 => Ponto Alvear (Vante)	0.2750	51.8430	-0.3914
DVA-MDP	L.161_Ponto_36	-56.566414000	-29.100814722	979241.9200	51.3800	64.769	-0.8544	499.2995	-8.3667	-8.2427	Ponto Alvear (Vante) => L.161_Ponto_36	-1.8599	50.9886	-0.3914
DVA-MDP	L.161_Ponto_34	-56.556388889	-29.068888889	979235.6400	65.5820	N/D	14.2020	638.3710	139.0715	138.9476	L.161_Ponto_36 => L.161_Ponto_34	-6.2800	65.1906	-0.3914
DVA-MDP	L.161_Ponto_32	-56.524722222	-29.028611111	979229.8200	66.0120	N/D	0.4300	642.5817	4.2107	4.0868	L.161_Ponto_34 => L.161_Ponto_32	-5.8200	65.6206	-0.3914
DVA-MDP	L.161_Ponto_30	-56.474444444	-29.013611111	979232.6800	64.9880	N/D	-1.0240	632.5543	-10.0273	-9.9034	L.161_Ponto_32 => L.161_Ponto_30	2.8600	64.5966	-0.3914
DVA-MDP	L.161_Ponto_29	-56.446944444	-29.004166667	979233.1000	62.7030	N/D	-2.2850	610.1789	-22.3755	-22.2516	L.161_Ponto_30 => L.161_Ponto_29	0.4200	62.3117	-0.3913
DVA-MDP	L.161_Ponto_26	-56.429114050	-28.943415244	979228.5700	64.0940	77.152	1.3910	623.8000	13.6211	13.4972	L.161_Ponto_29 => L.161_Ponto_26	-4.5300	63.7026	-0.3914
DVA-MDP	L.161_Ponto_24	-56.384722222	-28.913611111	979225.1600	66.8230	N/D	2.7290	650.5231	26.7231	26.5992	L.161_Ponto_26 => L.161_Ponto_24	-3.4100	66.4316	-0.3914
DVA-MDP	L.161_Ponto_22	-56.351111111	-28.888611111	979221.8200	71.8420	N/D	5.0190	699.6703	49.1472	49.0233	L.161_Ponto_24 => L.161_Ponto_22	-3.3400	71.4505	-0.3915
DVA-MDP	L.161_Ponto_20	-56.328057777	-28.851614489	979212.7400	70.7340	83.423	-1.1080	688.8206	-10.8497	-10.7258	L.161_Ponto_22 => L.161_Ponto_20	-9.0800	70.3426	-0.3914
DVA-MDP	L.161_Ponto_18	-56.335277778	-28.806388889	979209.1200	59.7510	N/D	-10.9830	581.2738	-107.5467	-107.4228	L.161_Ponto_20 => L.161_Ponto_18	-3.6200	59.3599	-0.3911
DVA-MDP	L.161_Ponto_16	-56.326388889	-28.758888889	979202.2000	54.4380	N/D	-5.3130	529.2486	-52.0252	-51.9013	L.161_Ponto_18 => L.161_Ponto_16	-6.9200	54.0470	-0.3910
DVA-MDP	L.161_Ponto_14	-56.294494021	-28.734156340	979198.3400	65.0550	77.514	10.6170	633.2103	103.9617	103.8378	L.161_Ponto_16 => L.161_Ponto_14	-3.8600	64.6636	-0.3914
DVA-MDP	L.161_Ponto_12	-56.254166667	-28.690000000	979193.4000	64.8730	N/D	-0.1820	631.4282	-1.7821	-1.6582	L.161_Ponto_14 => L.161_Ponto_12	-4.9400	64.4816	-0.3914
DVA-MDP	L.161_Ponto_10	-56.208888889	-28.706111111	979195.7200	65.1040	N/D	0.2310	633.6901	2.2619	2.1380	L.161_Ponto_12 => L.161_Ponto_10	2.3200	64.7126	-0.3914
DVA-MDP	L.161_Ponto_8	-56.184722222	-28.680277778	979193.1400	66.8960	N/D	1.7920	651.2373	17.5472	17.4233	L.161_Ponto_10 => L.161_Ponto_8	-2.5800	66.5046	-0.3914
DVA-MDP	L.161_Ponto_6	-56.157222222	-28.643055556	979192.1400	64.6110	N/D	-2.2850	628.8628	-22.3746	-22.2506	L.161_Ponto_8 => L.161_Ponto_6	-1.0000	64.2197	-0.3913
DVA-MDP	L.161_Ponto_4	-56.106388889	-28.622500000	979187.3600	70.0230	N/D	5.4120	681.8565	52.9937	52.8698	L.161_Ponto_6 => L.161_Ponto_4	-4.7800	69.6314	-0.3916
DVA-MDP	RN UFPR 08/10	-28.63149242	-55.99902631	979178.548	66.73349	77.8657	-2.3093	659.2445	-22.6120	-22.4881	L.161_Ponto_4 => RN UFPR 08/10	-8.8120	67.3223	0.5888

## 18. APÊNDICE I

Datum	Estação	Long	Lat	Grav.	H. Niv	h elipsoidal (m)	ΔH Utilizado (m)	Número Geopotencial (m²/s²)	dW (m²/s²)	dW (m²/s²) Ajustado	Sentido	dgravidade (mGal)	H dinâmica (m)	Dif Hdin-Hoficial (m)
DVA-MDP	Ponto Alvear (Vante)	-29.113145189	-56.555326631	979243.7799	52.2344	65.5792								
DVB-I	RN8935	-29.117985033	-56.554728989	979243.5049	51.6230	64.443	-0.0386	507.7236	-0.3779	-0.2814	Ponto Alvear (Vante) => RN8935	-0.2750	51.8489	0.2259
DVB-I	RN1931A	-29.121996881	-56.556541981	979243.1117	58.4215	71.2829	6.7985	573.8621	66.5739	66.4773	RN8935 => RN1931A	-0.3932	58.6030	0.1815
DVB-I	RN1923X	-29.130851064	-56.546552467	979238.5149	79.1996	92.056	20.7781	777.3297	203.4676	203.3711	RN1931A => RN1923X	-4.5969	79.3811	0.1815
DVB-I	RN1931B	-29.140662628	-56.547220483	979240.6058	66.9833	80.756	-12.2163	657.7029	-119.6268	-119.5303	RN1923X => RN1931B	2.0909	67.1648	0.1815
DVB-I	RN1931C	-29.169498608	-56.547537111	979242.9286	62.2421	75.039	-4.7412	611.2751	-46.4278	-46.4552	RN1931B => RN1931C	2.3228	62.4236	0.1815
DVB-I	RN1931 G	-29.262033925	-56.581752589	979245.4382	82.1931	95.0603	19.9510	806.6441	195.3690	195.3964	RN1931C => RN1931 G	2.5096	82.3747	0.1816
DVB-I	RN1931 M	-29.361648511	-56.643962989	979254.4654	63.5929	76.6147	-18.6002	624.5016	-182.1424	-182.1698	RN1931 G => RN1931 M	9.0272	63.7743	0.1814
DVB-I	RN1931 S	-29.444240806	-56.684353722	979262.1470	64.3159	77.447	0.7230	631.5817	7.0800	7.1074	RN1931 M => RN1931 S	7.6816	64.4973	0.1814
DVB-I	RN1931 Z	-29.540028539	-56.804991411	979271.1086	70.3405	83.7334	6.0246	690.5786	58.9969	59.0243	RN1931 S => RN1931 Z	8.9616	70.5221	0.1816
DVB-I	RN1932 D	-29.602716619	-56.865600578	979272.9333	71.9967	85.4928	1.6562	706.7973	16.2187	16.2461	RN1931 Z => RN1932 D	1.8247	72.1784	0.1817
DVB-I	RN1932 J	-29.727590192	-56.948199886	979281.4717	74.0632	87.7492	2.0665	727.0340	20.2368	20.2641	RN1932 D => RN1932 J	8.5384	74.2449	0.1817
DVB-I	RNUFPR0805	-29.749329167	-57.087222222	979291.9330	57.9711	72.06	-16.0921	569.4460	-157.5881	-157.6155	RN1932 J => RNUFPR0805	10.4613	58.1520	0.1809
DVA-MDP	PFA 1XA	0.000000000	0.000000000	979288.9515	55.1950	0	-3.3041	537.0895	-32.3564	-32.3838	RNUFPR0805 => PFA 1XA	-2.9815	54.8477	-0.3473
DVA-MDP	L.107_Ponto_34	-57.216666667	-29.680555556	979285.9700	59.6060	N/D	4.4110	580.2859	43.1964	43.2238	PFA 1XA => L.107_Ponto_34	-2.9815	59.2590	-0.3470
DVA-MDP	L.107_Ponto_32	-57.222222222	-29.633333333	979277.9000	68.8140	N/D	9.2080	670.4582	90.1723	90.1997	L.107_Ponto_34 => L.107_Ponto_32	-8.0700	68.4674	-0.3466
DVA-MDP	L.107_Ponto_30	-57.208333333	-29.583333333	979276.0000	60.9000	N/D	-7.9140	592.9582	-77.5000	-77.5274	L.107_Ponto_32 => L.107_Ponto_30	-1.9000	60.5531	-0.3469
DVA-MDP	L.107_Ponto_28	-57.155555556	-29.561111111	979271.1400	71.6510	N/D	10.7510	698.2399	105.2817	105.3091	L.107_Ponto_30 => L.107_Ponto_28	-4.8600	71.3045	-0.3465
DVA-MDP	L.107_Ponto_26	-57.133410083	-29.535850111	979268.6400	70.7590	85.189	-0.8920	689.5048	-8.7351	-8.7625	L.107_Ponto_28 => L.107_Ponto_26	-2.5000	70.4124	-0.3466
DVA-MDP	L.107_Ponto_24	-57.066666667	-29.516666667	979268.9300	74.4760	N/D	3.7170	725.9042	36.3994	36.4268	L.107_Ponto_26 => L.107_Ponto_24	0.2900	74.1296	-0.3464
DVA-MDP	L.107_Ponto_22	-57.016666667	-29.513888889	979268.4100	72.5760	N/D	-1.9000	707.2981	-18.6061	-18.6335	L.107_Ponto_24 => L.107_Ponto_22	-0.5200	72.2295	-0.3465
DVA-MDP	L.107_Ponto_20	-56.983333333	-29.491666667	979269.0300	66.7920	N/D	-5.7840	650.6572	-56.6409	-56.6683	L.107_Ponto_22 => L.107_Ponto_20	0.6200	66.4453	-0.3467
DVA-MDP	L.107_Ponto_18	-56.936364778	-29.463949556	979263.6900	64.4950	78.667	-2.2970	628.1635	-22.4937	-22.5211	L.107_Ponto_20 => L.107_Ponto_18	-5.3400	64.1482	-0.3468
DVA-MDP	L.107_Ponto_16	-56.898611111	-29.433333333	979262.9900	64.0490	N/D	-0.4460	623.7959	-4.3675	-4.3949	L.107_Ponto_18 => L.107_Ponto_16	-0.7000	63.7022	-0.3468
DVA-MDP	L.107_Ponto_14	-56.852777778	-29.416666667	979263.1300	64.2900	N/D	0.2410	626.1560	2.3600	2.3874	L.107_Ponto_16 => L.107_Ponto_14	0.1400	63.9432	-0.3468
DVA-MDP	L.107_Ponto_12	-56.833333333	-29.372222222	979257.9500	65.9620	N/D	1.6720	642.5292	16.3732	16.4006	L.107_Ponto_14 => L.107_Ponto_12	-5.1800	65.6153	-0.3467
DVA-MDP	L.107_Ponto_10	-56.786111111	-29.350000000	979254.2700	64.5720	N/D	-1.3900	628.9175	-13.6117	-13.6390	L.107_Ponto_12 => L.107_Ponto_10	-3.6800	64.2253	-0.3467
DVA-MDP	L.107_Ponto_8	-56.741666667	-29.322222222	979254.8300	55.9160	N/D	-8.6560	544.1533	-84.7643	-84.7917	L.107_Ponto_10 => L.107_Ponto_8	0.5600	55.5691	-0.3469
DVA-MDP	L.107_Ponto_6	-56.700854574	-29.298164520	979252.9900	65.7390	79.446	9.8230	640.3454	96.1921	96.2195	L.107_Ponto_8 => L.107_Ponto_6	-1.8400	65.3923	-0.3467
DVA-MDP	L.107_Ponto_2	-56.675000000	-29.208333333	979244.8000	51.3890	N/D	-14.3500	499.8232	-140.5222	-140.5496	L.107_Ponto_6 => L.107_Ponto_2	-8.1900	51.0421	-0.3469
DVA-MDP	L.109_Ponto_72	-56.670555556	-29.171666667	979235.4800	63.9510	N/D	12.5620	622.8353	123.0121	123.0395	L.107_Ponto_2 => L.109_Ponto_72	-9.3200	63.6041	-0.3469
DVA-MDP	L.109_Ponto_ND176	-56.647222222	-29.175000000	979240.8200	66.8900	N/D	2.9390	651.6151	28.7798	28.8072	L.109_Ponto_72 => L.109_Ponto_ND176	5.3400	66.5431	-0.3469
DVA-MDP	L.161_Ponto_39	-56.630000000	-29.140833333	979241.6000	51.7930	N/D	-15.0970	503.7791	-147.8360	-147.8634	L.109_Ponto_ND176 => L.161_Ponto_39	0.7800	51.4461	-0.3469
DVA-MDP	L.161_Ponto_36	-56.566414000	-29.100814722	979241.9200	51.3800	64.769	-0.4130	499.7348	-4.0443	-4.0716	L.161_Ponto_39 => L.161_Ponto_36	0.3200	51.0331	-0.3469
DVA-MDP	Ponto Alvear (Vante)	-29.11314519	-56.55532663	979243.7799	52.2344	65.5792	0.8544	508.1015	8.3667	8.3940	L.161_Ponto_36 => Ponto Alvear (Vante)	1.8599	51.8875	-0.3469

## 19. APÊNDICE J

```
%LABORATÓRIO DE REFERENCIAIS GEODÉSICOS E ALTIMETRIA POR SATÉLITES
%Colocação por Mínimos Quadrados VERSÃO 3.1
%Modificações:
% a) Função de Covariância aproximada por um polinômio de 4o grau
% b) Função de Stokes substituída pela distância
%Desenvolvido inicialmente por Rogers e Henry - O Castro
%-----
%Programa desenvolvido para interpolação de anomalias da gravidade
%Versão da Tese
%Última Atualização: 23/06/2013 - 10h24
%-----
%Carregando dados de Entrada
% Id | Latitude [Deg] | Longitude [Deg] | Anom. da Gravidade[mGal]

entrada=load('Gravity_Anomaly_Rogers_t2.txt', '-ASCII');
entrada1(:,1)=entrada(:,1);
entrada1(:,2)=deg2rad(entrada(:,2));
entrada1(:,3)=deg2rad(entrada(:,3));
entrada1(:,4)=entrada(:,4)-mean(entrada(:,4));

entrada=entrada1

% Determinação da dimensão da matriz
tam=size(entrada);
tam=tam(1);

%-----
%Definição das Constantes-----
p1 =-0.2764;
p2 =5.359;
p3 =-37.87;
p4 =122.6;
p5 =-175.4;
p6 =59.82;
p7 =53.78;
R=1;    %[m]
%-----
%Cálculo da Função covariância entre os elementos
%Contador inicial = m,n
tic

for m=1:tam
    for n=1:tam
        % Extração de informações espaciais
        Lat1=entrada(m,2);
        Lon1=entrada(m,3);
        Ano1=entrada(m,4);
        Lat2=entrada(n,2);
        Lon2=entrada(n,3);
        Ano2=entrada(n,4);

        % Cálculo da distância
        distang=((Lat2-Lat1)^2+(Lon2-Lon1)^2)^.5;
        dist1=R*distang;
```



```

dist(m,n)=dist1;

%Função Covariância

COV(m,n)=p1*(dist(m,n))^6+p2*(dist(m,n))^5+p3*(dist(m,n))^4+...
          p4*(dist(m,n))^3+p5*(dist(m,n))^2+p6*(dist(m,n))+p7*(dist(m,n));
end

m
toc
end
toc

x=1
%-----
%Carregando arquivo de pontos a predizer
% Id | Latitude [RAD] | Longitude [RAD]

pred=load('PontosPred.dat', '-ASCII');

pred1(:,1)=pred(:,1);
pred1(:,2)=deg2rad(pred(:,2));
pred1(:,3)=deg2rad(pred(:,3));

pred=pred1;

tamsaida=size(pred);
tamsaida=tamsaida(1);

invCov=inv(COV);
PinvCov=pinv(COV);
% image(invCov,'CDataMapping','scaled');colorbar;
% figure;image(PinvCov,'CDataMapping','scaled');colorbar;

tic
for p=1:tamsaida
    % Extração de informações espaciais
    LatPC=pred(p,2);
    LonPC=pred(p,3);

    for q=1:tam
        LatAV=entrada(q,2);
        LonAV=entrada(q,3);

        % Cálculo da distância
        distang1=((LatAV-LatPC)^2+(LonAV-LonPC)^2)^.5;
        dist2=R*distang1;
        dist3(q,1)=dist2;

        %Função Covariância

        COV2(1,q)=p1*(dist3(q,1))^6+p2*(dist3(q,1))^5+p3*(dist3(q,1))^4+...
                  p4*(dist3(q,1))^3+p5*(dist3(q,1))^2+p6*(dist3(q,1))+p7*(dist3(q,1));
    end
end

```

```
end

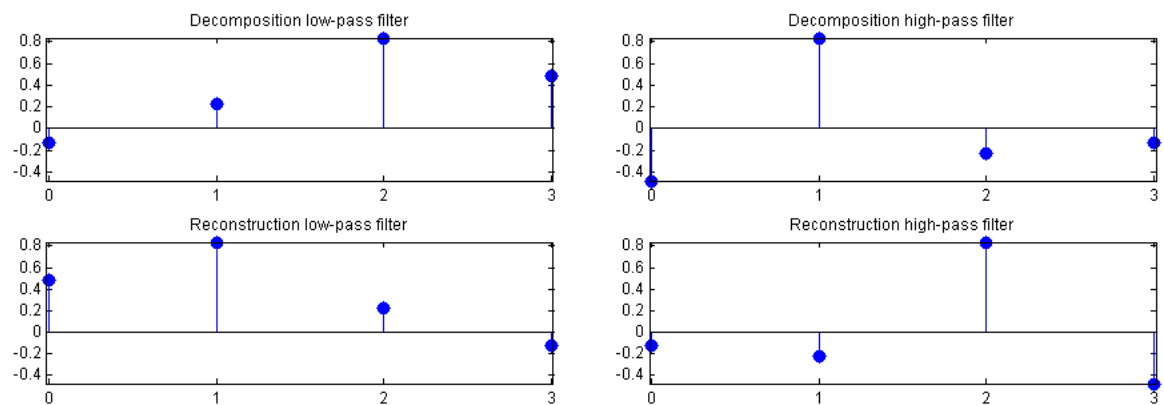
AnoPC=COV2*PinvCov*entrada(:,4);

saidacalc(p,1)=AnoPC;
p
end
toc
```

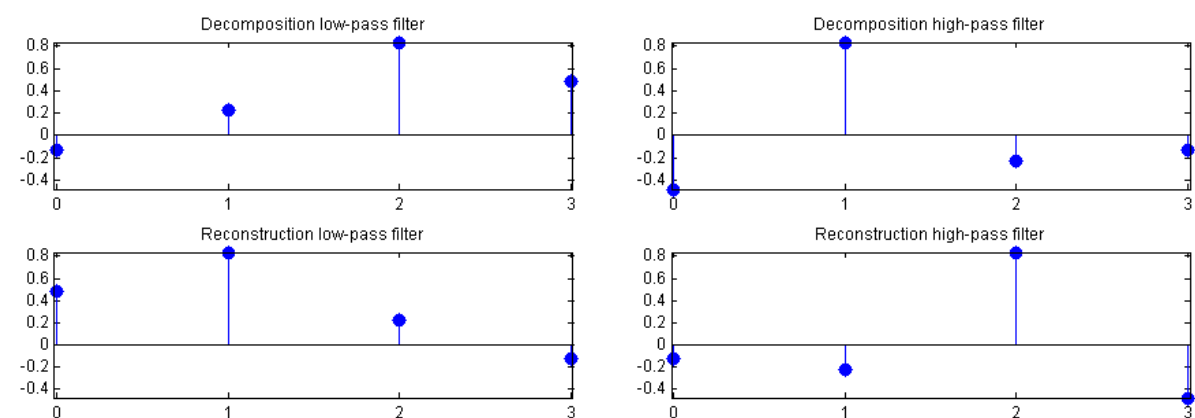
## 20. APÊNDICE K

Esquemas em Filtros das *wavelets* utilizadas:

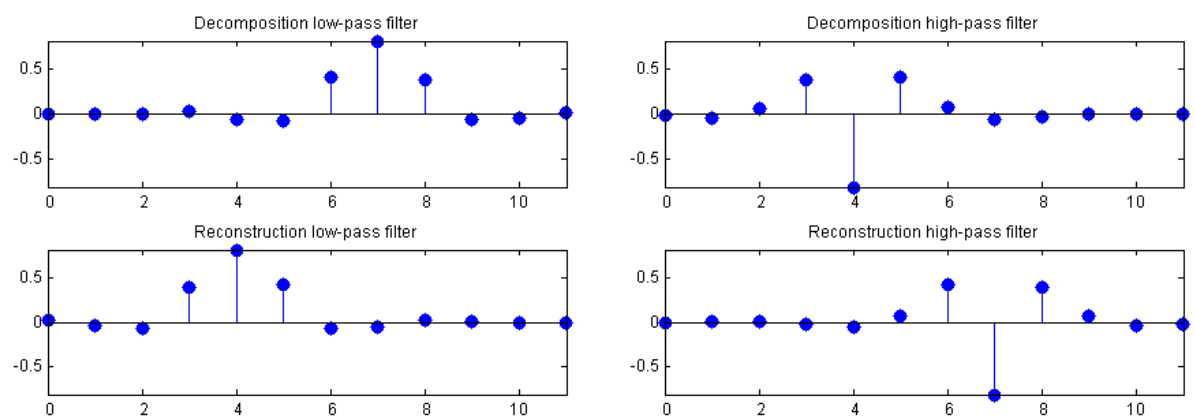
### Seção 5.1.1: Daubechies db2



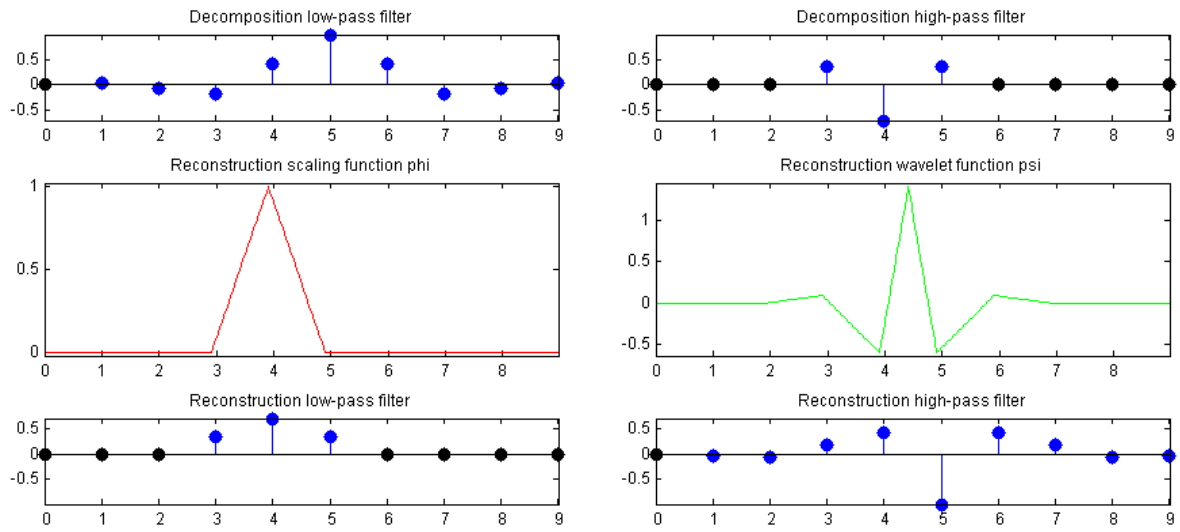
### Seção 5.1.1: Symlets sym2



### Seção 5.1.1: Coiflets coif2



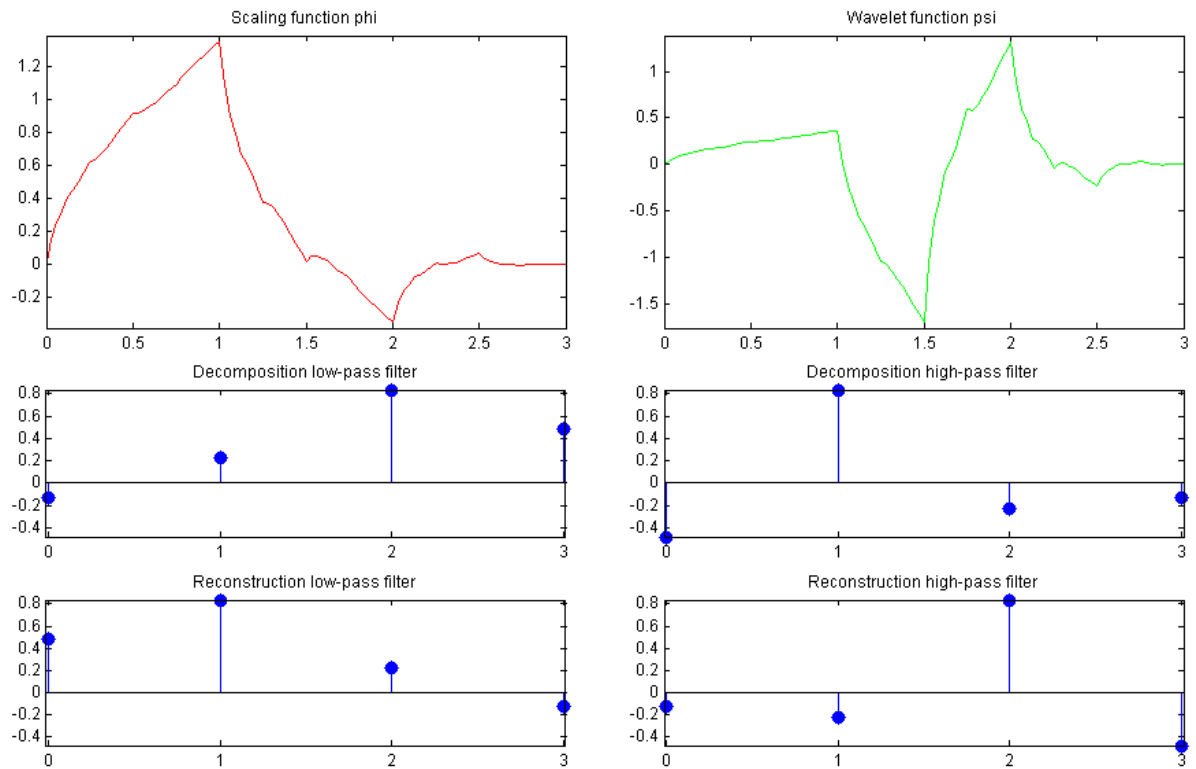
### Seção 5.1.1: Biorthogonais bior2.4



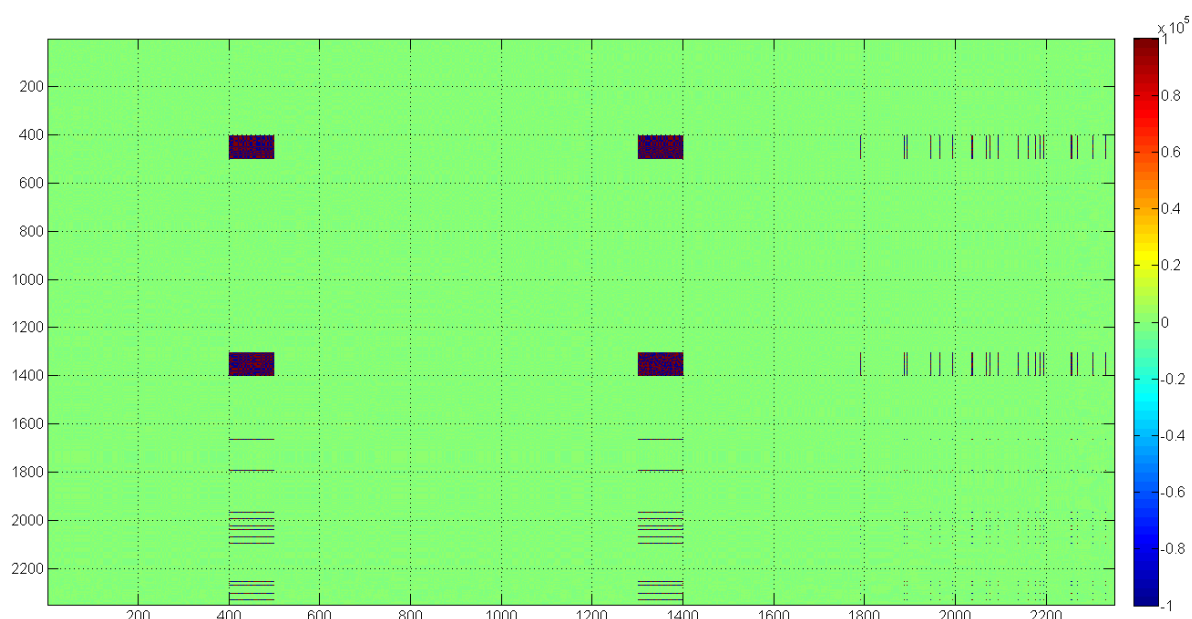
Seção 5.1.2: Daubechies db2 - Idem aos diagramas da seção 5.1.1.

Seção 5.4: Biorthogonais bior2.4 - - Idem aos diagramas da seção 5.1.1.

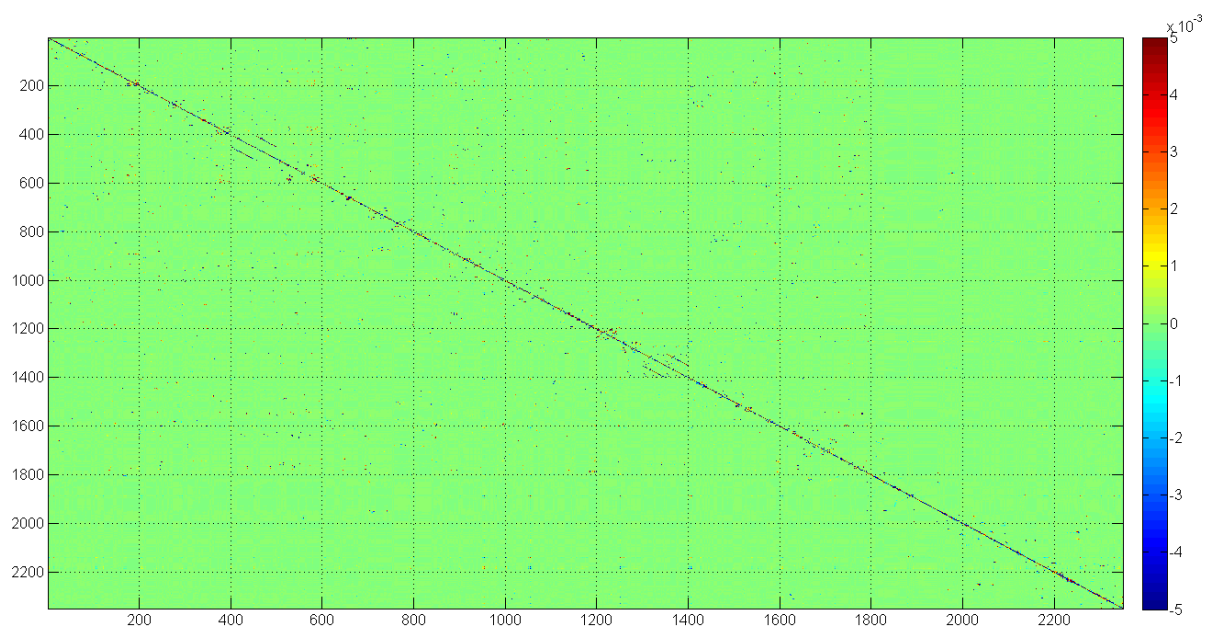
### Seção 5.9.4: Symlets sym3



## 21. APÊNDICE L



Inversa da Matriz Variância Covariância para o Modelo de Fourier. Escala em  $\text{mGal}^2$



Pseudo-Inversa da Matriz Variância Covariância para o Modelo de Fourier. Escala em  $\text{mGal}^2$

## 22. APÊNDICE M

```
%Complementação usando cross-validation
%Tamanho das matrizes envolvidas:
%Original:

sizeoriginal=size(ZMat);
linhasoriginal=sizeoriginal(1,1);
colunasoriginal=sizeoriginal(1,2);

%Reconstruída com Wavelets:
sizerecon=size(EGM2008Recon);
linhasrecon=sizerecon(1,1);
colunasrecon=sizerecon(1,2);

%Criando vetor das distâncias

posicao=1:linhasrecon

for i=1:linhasrecon

    for j=1:colunasrecon

        %Segmentando a matriz em linhas:
        linhainalt=ZMat(i,:);
        linhaorig=ZMat(i,:);
        linhairecon=EGM2008Recon(i,:);

        %Ponto a substituir
        pontosubst=linhairecon(j);
        linhaorig(j)=pontosubst;

        %Ajustando um polinômio de 1ª ordem com os dados originais
        q(j,:)=polyfit(posicao,linhainalt,1);

        %Ajustando um polinômio de 1ª ordem com o ponto substituído
        p(j,:)=polyfit(posicao,linhaorig,1);

        %Avaliando o efeito da substituição
        q_posicao(j)=polyval(q(j,:),posicao(j));
        p_posicao(j)=polyval(p(j,:),posicao(j));

        %Erro na posicao j
        p_erro(i,j)=p_posicao(j)-q_posicao(j);

    end
end
end
```

## 23. APÊNDICE N

